Fiche 32 : Suites : les grands classiques.

Exercice 1

1. Montrer qu'une suite d'entiers convergente est stationnaire à partir d'un certain rang.
2. Montrer (on pourra utiliser le théorème de Bolzano-Weierstrass) que si $(u_n)_{n\in\mathbb{R}}$ est une suite de réels tel que $|u_n| \not\to +\infty$ alors on peut extraire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente.
3. Montrer que si on a des suites d'entiers $(p_n) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, $(q_n) \in (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$ tel que :
$$\frac{p_n}{q_n} \to x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$$
alors $q_n \to +\infty$.

Exercice 2

On considère les suites définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :
$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n! \cdot n}$$

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
2. Leur limite commune est (par définition en fait) le nombre e. Montrer que e est un nombre irrationnel.

Exercice 3 : Constante d'Euler

Soit pour $n \in \mathbb{N}^*$: $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

1. Montrer que pour tout $x > 0$: $\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}$.
2. En déduire que pour $n \in \mathbb{N}^*$: $\ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$.
3. Déterminer la limite de $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
4. Montrer que les suites $(u_n = H_n - \ln(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n = H_n - \ln(n+1))_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes et strictement positives.
5. Conclusion ?

Exercice 4

On pose si $n \in \mathbb{N}^*$:
$$v_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}$$

1. Étudier la monotonie de la suite $(v_n)_{n\in *}$.
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\ln(2n+1) - \ln(n+1) \leq v_n \leq \ln(2n) - \ln(n)$$
3. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 5

1. Si $n \geq 1$, montrer que l'équation (F_n) :
$$x + x^n = 1$$
admet une unique solution dans $[0, 1]$, qu'on note b_n.
2. Étudier la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.