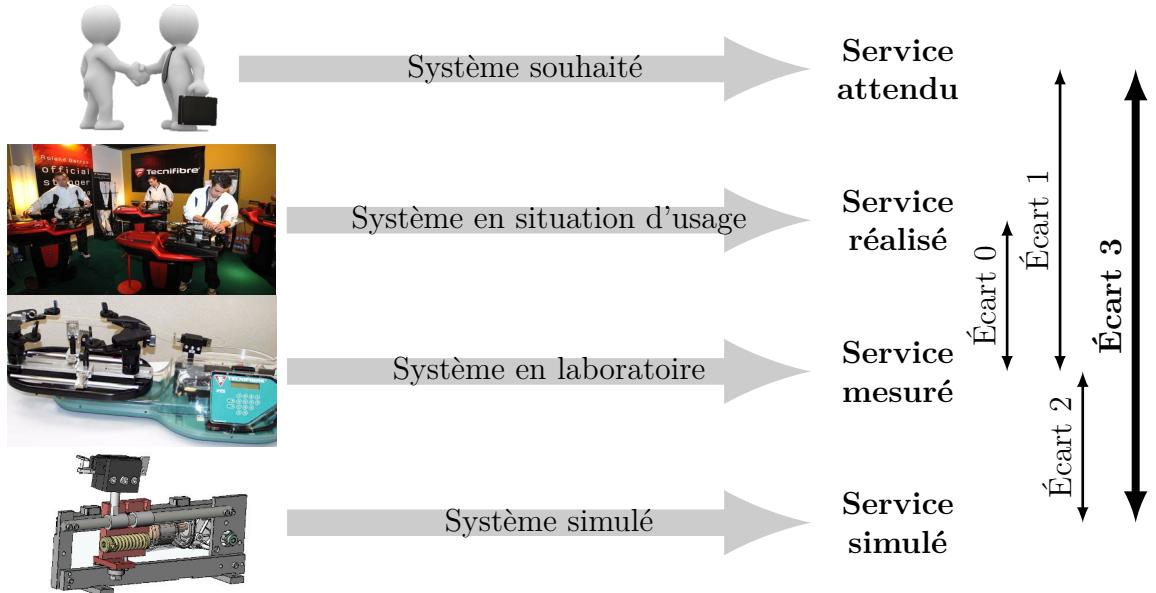


# Modélisation et comportement cinématique des systèmes

— *Éléments de correction des TDs* —



**Écart 0** – évalue la fiabilité et la fidélité du système de laboratoire didactisé par rapport au système réel. Il répond aux questions « le système de laboratoire est-il représentatif du système réel ? Permet-il de l'étudier de manière fiable ? »

**Écart 1** – évalue le respect du CDCF par le système réel sur prototype instrumenté en laboratoire. Il répond à la question « le système réalisé, répond-il au CDCF ? ».

**Écart 2** – évalue la fiabilité du modèle et de ses hypothèses. Il répond à la question « le modèle est-il correct ? ».

**Écart 3** – évalue, en phase de conception, le respect du CDCF à partir d'un modèle simulé. Il répond à la question « le modèle du système satisfait-il les exigences du CDCF ? ».

## Exercices

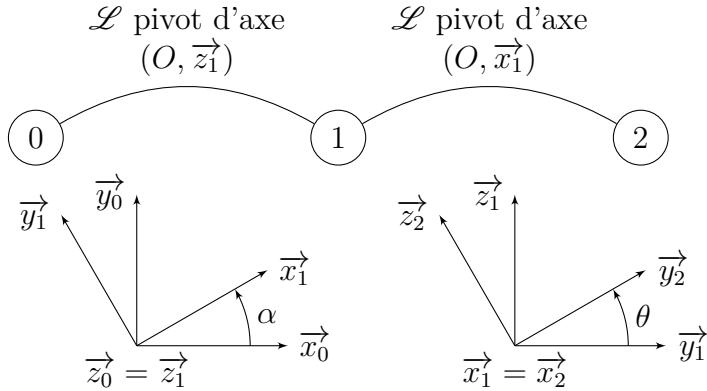
|                                                                          |    |
|--------------------------------------------------------------------------|----|
| Exercice 1 – Éolienne à pôle endommagée.....                             | 3  |
| Exercice 2 – Régulateur de Watt.....                                     | 6  |
| Exercice 3 – Pompe hydraulique à pistons radiaux.....                    | 9  |
| Exercice 4 – Transmission homocinétique par joint de Oldham .....        | 11 |
| Exercice 5 – Attraction Magic Arms .....                                 | 14 |
| Exercice 6 – Modélisation d'une capsuleuse.....                          | 19 |
| Exercice 7 – Planeuse sous traction pour bandes d'acier inoxydable ..... | 23 |
| Exercice 8 – Robot Rovio.....                                            | 27 |
| Exercice 9 – Étude d'un différentiel automobile .....                    | 31 |
| Exercice 10 – Système d'aide à la navigation .....                       | 35 |
| Exercice 11 – Table élévatrice .....                                     | 37 |



— EXERCICE 1 —

## Éolienne à pôle endommagée

**Question 1.1.**



**Question 1.2.** Par définition, avec la première figure géométrale de normale  $\vec{z}_0$  et de variation d'angle  $\dot{\alpha}$ , il vient :

$$\overrightarrow{\Omega}_{1/0} = \dot{\alpha} \vec{z}_1$$

De même, avec l'autre figure géométrale, on trouve :

$$\overrightarrow{\Omega}_{2/1} = \dot{\theta} \vec{x}_1$$

Il vient alors par composition des taux de rotation :

$$\overrightarrow{\Omega}_{2/0} = \overrightarrow{\Omega}_{2/1} + \overrightarrow{\Omega}_{1/0} = \dot{\theta} \vec{x}_1 + \dot{\alpha} \vec{z}_1$$

**Question 1.3.** Par composition des mouvements, la trajectoire du point  $G_2$  d'une pôle 2 dans son mouvement par rapport au mât 0 dépend de deux contributions :

$T_{G_2/1}$  Comme  $\{\mathcal{V}_{2/1}\}$  est une rotation d'axe  $(O, \vec{x}_1)$ , la trajectoire du point  $G_2$  dans  $\mathcal{R}_2$  est un cercle de centre  $B$ , de rayon  $c$ , dans le plan de normale  $\vec{x}_1$  ;

$T_{G_2 \in 1/0}$  Comme  $\{\mathcal{V}_{1/0}\}$  est une rotation d'axe  $(O, \vec{z}_1)$ , le point  $G_2 \in S_1$  décrit dans  $\mathcal{R}_0$  un cercle de centre  $H$ , le projeté orthogonal du point  $G_2$  sur la droite  $(O, \vec{z}_1)$ , de rayon  $\|\overrightarrow{OG_2} \wedge \vec{z}_1\| \in [b, \sqrt{b^2 + c^2}]$ , dans le plan de normale  $\vec{z}_1$ .

La trajectoire du point  $G_2$  d'une pôle par rapport au mât 0 évolue donc sur une surface sphérique de centre  $O$  et de rayon  $\sqrt{b^2 + c^2}$ , limitée dans la direction  $\vec{z}_1$  par deux plans situés à  $c$  du point  $O$ .

**Question 1.4.** Par définition, on a :

$$\overrightarrow{V}_{B,1/0} = \left. \frac{d\overrightarrow{OB}}{dt} \right|_{B_0} = b \left. \frac{d\vec{x}_1}{dt} \right|_{B_0}$$

avec, par formule de dérivation vectorielle,

$$\frac{d\vec{x}_1}{dt} \Big|_{\mathcal{B}_0} = \frac{d\vec{x}_1}{dt} \Big|_{\mathcal{B}_1} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \vec{x}_1 = \dot{\alpha} \vec{z}_1 \wedge \vec{x}_1 = \dot{\alpha} \vec{y}_1$$

il vient finalement

$$\overrightarrow{V_{B,1/0}} = b \dot{\alpha} \vec{y}_1$$

**Question 1.5.** Par définition, on a :

$$\overrightarrow{V_{G_2,2/1}} = \frac{d\overrightarrow{BG_2}}{dt} \Big|_{\mathcal{B}_1} = c \frac{d\vec{z}_2}{dt} \Big|_{\mathcal{B}_1}$$

avec, par formule de dérivation vectorielle,

$$\frac{d\vec{z}_2}{dt} \Big|_{\mathcal{B}_1} = \frac{d\vec{z}_2}{dt} \Big|_{\mathcal{B}_2} + \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \wedge \vec{z}_2 = \dot{\theta} \vec{x}_2 \wedge \vec{z}_2 = -\dot{\theta} \vec{y}_2$$

il vient finalement

$$\overrightarrow{V_{G_2,2/1}} = -c\dot{\theta} \vec{y}_2$$

**Question 1.6.** Considérant que le point  $G_2$  appartient au corps **1**, c'est-à-dire considérant la liaison pivot entre le corps **1** et la pâle **2** bloquée avec  $\overrightarrow{\Omega_{2/1}} = \vec{0}$ , il vient par définition :

$$\overrightarrow{V_{G_2 \in 1/0}} = \frac{d\overrightarrow{OG_2}}{dt} \Big|_{\mathcal{B}_0} = b \frac{d\vec{x}_1}{dt} \Big|_{\mathcal{B}_0} + c \frac{d\vec{z}_2}{dt} \Big|_{\mathcal{B}_0}$$

avec, par formule de dérivation vectorielle,

$$\frac{d\vec{z}_2}{dt} \Big|_{\mathcal{B}_0} = \frac{d\vec{z}_2}{dt} \Big|_{\mathcal{B}_2} + \overrightarrow{\Omega_{2/0}} \wedge \vec{z}_2 = \dot{\alpha} \vec{z}_1 \wedge \vec{z}_2 = \sin(\theta) \dot{\alpha} \vec{x}_1$$

il vient finalement

$$\overrightarrow{V_{G_2 \in 1/0}} = \dot{\alpha} (c \sin(\theta) \vec{x}_1 + b \vec{y}_1)$$

**Question 1.7.** Par définition, on a :

$$\overrightarrow{V_{G_2,2/0}} = \frac{d\overrightarrow{OG_2}}{dt} \Big|_{\mathcal{B}_0} = \underbrace{\frac{d\overrightarrow{OB}}{dt} \Big|_{\mathcal{B}_0}}_{\overrightarrow{V_{B,1/0}}} + \frac{d\overrightarrow{BG_2}}{dt} \Big|_{\mathcal{B}_0}$$

avec, par formule de dérivation vectorielle,

$$\frac{d\overrightarrow{BG_2}}{dt} \Big|_{\mathcal{B}_0} = \underbrace{\frac{d\overrightarrow{BG_2}}{dt} \Big|_{\mathcal{B}_1}}_{\overrightarrow{V_{G_2,2/1}}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{BG_2}$$

et

$$\overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{BG_2} = \dot{\alpha} \overrightarrow{z_1} \wedge c \overrightarrow{z_2} = c \sin(\theta) \dot{\theta} \overrightarrow{x_1}$$

On reconnaît

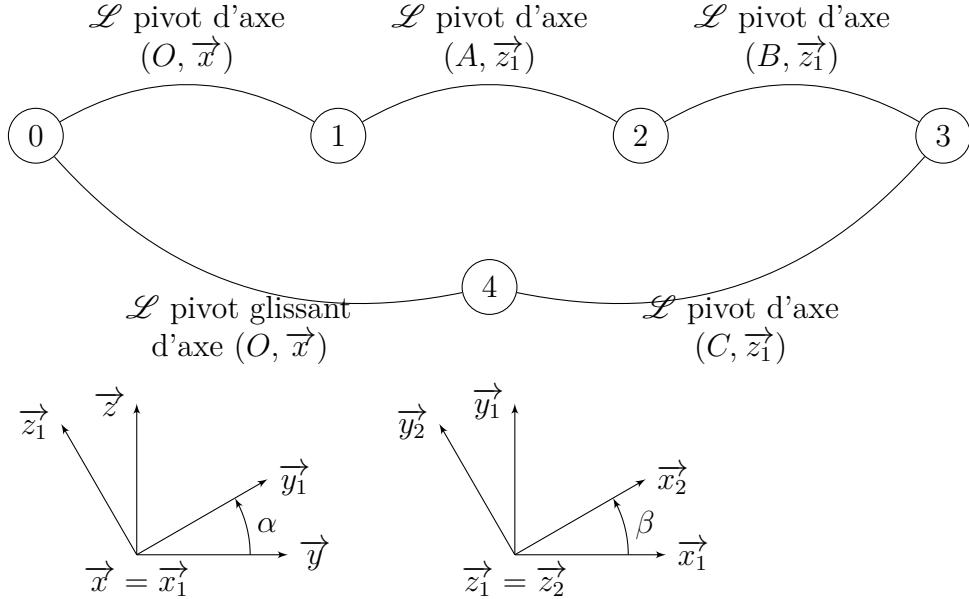
$$\overrightarrow{V_{B,1/0}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{BG_2} = \dot{\alpha} (c \sin(\theta) \overrightarrow{x_1} + b \overrightarrow{y_1}) = \overrightarrow{V_{G_2 \in 1/0}}$$

d'où, finalement

$$\boxed{\overrightarrow{V_{G_2,2/0}} = \overrightarrow{V_{G_2,2/1}} + \overrightarrow{V_{G_2 \in 1/0}}}$$

— EXERCICE 2 —  
Régulateur de Watt

**Question 2.1.**



**Question 2.2.** Sachant que la liaison entre **0** et **1** est une pivot d'axe  $(O, \vec{x})$ , on a

$$\forall M \in (O, \vec{x}), \quad \{\mathcal{V}_{1/0}\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\alpha} \vec{x} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_M$$

d'où, par relation de changement de point :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V_{A,1/0}} &= \underbrace{\overrightarrow{V_{O,1/0}}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{OA} \\ &= \dot{\alpha} \vec{x} \wedge R \vec{y}_1 \\ &= R \dot{\alpha} \vec{z}_1 \end{aligned}$$

**Question 2.3.** Sachant que la liaison entre **1** et **2** est une liaison pivot d'axe  $(A, \vec{z}_1)$ , on a

$$\forall M \in (A, \vec{z}_1), \quad \{\mathcal{V}_{2/1}\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\beta} \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_M$$

d'où, par relation de changement de point :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V_{B,2/1}} &= \underbrace{\overrightarrow{V_{A,2/1}}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \wedge \overrightarrow{AB} \\ &= \dot{\beta} \vec{z}_1 \wedge \ell \vec{x}_2 \\ &= \ell \dot{\beta} \vec{y}_2 \end{aligned}$$

**Question 2.4.** Par composition des vitesses au point  $B$ , on a :

$$\overrightarrow{V_{B,2/0}} = \overrightarrow{V_{B,2/1}} + \overrightarrow{V_{B\in 1/0}}$$

avec, par relation de changement de point :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V_{B\in 1/0}} &= \overrightarrow{V_{A,1/0}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{AB} \\ &= R\dot{\alpha} \overrightarrow{z_1} + \dot{\alpha} \overrightarrow{x} \wedge \ell \overrightarrow{x_2} \\ &= \dot{\alpha} (R + \ell \sin(\beta)) \overrightarrow{z_1} \end{aligned}$$

d'où, par somme :

$$\boxed{\overrightarrow{V_{B,2/0}} = \dot{\alpha} (R + \ell \sin(\beta)) \overrightarrow{z_1} + \ell \dot{\beta} \overrightarrow{y_2}}$$

**Question 2.5.** Commençons par exprimer les éléments de réduction canoniques de la liaison pivot d'axe  $(B, \overrightarrow{z_1})$  entre **2** et **3**, notamment le taux de rotation  $\overrightarrow{\Omega_{3/2}}$ .

Dans le plan de normale  $\overrightarrow{z_1}$ , on a :

$$(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}) + (\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_3}) + (\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{x_1}) \equiv 0 [2\pi]$$

Sachant le triangle  $ABC$  isocèle en  $B$ , on a  $(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}) = (\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{x_1}) = \beta$ , d'où

$$(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_3}) \equiv -2\beta [2\pi]$$

Par dérivation, il vient alors :

$$\overrightarrow{\Omega_{3/2}} = -2\dot{\beta} \overrightarrow{z_1}$$

tel que

$$\forall M \in (B, \overrightarrow{z_1}), \quad \{\mathcal{V}_{3/2}\} = \underbrace{\overrightarrow{0}}_M \left\{ \begin{array}{l} -2\dot{\beta} \overrightarrow{z_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}$$

d'où, par relation de changement de point :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V_{C,3/2}} &= \underbrace{\overrightarrow{V_{B,3/2}}}_{\overrightarrow{0}} + \overrightarrow{\Omega_{3/2}} \wedge \overrightarrow{BC} \\ &= -2\dot{\beta} \overrightarrow{z_1} \wedge \ell \overrightarrow{x_3} \\ &= -2\ell \dot{\beta} \overrightarrow{y_3} \end{aligned}$$

**Question 2.6.** Par composition des vitesses au point  $C$ , on a :

$$\overrightarrow{V_{C,3/0}} = \overrightarrow{V_{C,3/2}} + \overrightarrow{V_{C\in 2/1}} + \overrightarrow{V_{C\in 1/0}}$$

avec, par relation de changement de point :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V_{C\in 2/1}} &= \overrightarrow{V_{B,2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \wedge \overrightarrow{BC} \\ &= \ell \dot{\beta} \overrightarrow{y_2} + \dot{\beta} \overrightarrow{z_1} \wedge \ell \overrightarrow{x_3} \\ &= \ell \dot{\beta} (\overrightarrow{y_2} + \overrightarrow{y_3}) \end{aligned}$$

et, comme  $C \in (A, \overrightarrow{\Omega_{1/0}})$ , c'est-à-dire tel que  $\overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0}$ , alors

$$\overrightarrow{V_{C \in 1/0}} = \overrightarrow{V_{A,1/0}}$$

Par somme, il vient :

$$\overrightarrow{V_{C,3/0}} = \dot{\alpha}R\overrightarrow{z_1} + \ell\dot{\beta}(\overrightarrow{y_2} - \overrightarrow{y_3}) \iff \boxed{\overrightarrow{V_{C,3/0}} = \dot{\alpha}R\overrightarrow{z_1} - 2\ell\sin(\beta)\dot{\beta}\overrightarrow{x}}$$

**Question 2.7.** Pour vérifier le cahier des charges, il suffit de prendre la situation extrême avec  $\beta \equiv \pi/2$  [2π] constant. Dans ce cas, il vient :

$$\|\overrightarrow{V_{B,2/0}}\| = |\dot{\alpha}|(R + \ell)$$

Avec une vitesse de rotation de  $|\dot{\alpha}| = 200 \text{ tr/min} \approx 20 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ ,  $R = 20 \text{ mm}$  et  $\ell = 80 \text{ mm}$ , il vient :

$$\|\overrightarrow{V_{B,2/0}}\| \approx 2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} = v_{\max}$$

Donc le cahier des charges est vérifié.

— EXERCICE 3 —

## Pompe hydraulique à pistons radiaux

**Question 3.1.** La liaison entre l'excentrique **1** et le piston **2** est une sphère-plan de normale  $(BC) = (C, \vec{x}_0)$ . Les éléments de réduction canoniques du torseur cinématique sont :

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\}_C = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \\ \overrightarrow{V_{C,2/1}} \end{array} \right\} \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{V_{C,2/1}} \cdot \vec{x}_0 = 0$$

Le plan tangent au contact est le plan passant par  $C$  de normale  $\vec{x}_0$ . La vitesse du point de contact  $\overrightarrow{V_{C,2/1}}$  étant dans ce plan, c'est une vitesse de glissement.

**Question 3.2.** Sachant, par théorème d'équiprojectivité du champ de vitesses  $\{\mathcal{V}_{2/1}\}$  le long de  $(BC)$  que

$$\overrightarrow{V_{B,2/1}} \cdot \vec{x}_0 = \overrightarrow{V_{C,2/1}} \cdot \vec{x}_0 = 0$$

et que,  $\{\mathcal{V}_{2/0}\}$  étant une translation de direction  $\vec{x}_0$  telle que

$$\forall M, \overrightarrow{V_{M,2/0}} = \dot{X} \vec{x}_0$$

alors, par composition des vitesses au point  $B$  dans la direction  $\vec{x}_0$ , il vient :

$$\underbrace{\overrightarrow{V_{B,2/0}} \cdot \vec{x}_0}_{\dot{X}} = \underbrace{\overrightarrow{V_{B,2/1}} \cdot \vec{x}_0}_0 + \overrightarrow{V_{B,1/0}} \cdot \vec{x}_0$$

Par relation de changement de point et linéarité du produit scalaire, on a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V_{B,1/0}} \cdot \vec{x}_0 &= \overrightarrow{V_{O,1/0}} \cdot \vec{x}_0 + (\overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{OB}) \cdot \vec{x}_0 \\ &= (\dot{\theta} \vec{z}_0 \wedge e \vec{x}_1) \cdot \vec{x}_0 \\ &= e \dot{\theta} \vec{y}_1 \cdot \vec{x}_0 \\ &= -e \sin(\theta) \dot{\theta} \end{aligned}$$

d'où finalement :

$$\boxed{\dot{X} = -e \sin(\theta) \dot{\theta}}$$

qui correspond ici à la dérivée de la loi entrée-sortie géométrique  $X = R + e \cos(\theta)$ .

**Question 3.3.** Le débit instantané correspond au flux sortant. Il faut donc distinguer l'admission en fluide à comprimer du refoulement de celui qui vient d'être comprimé.

$$Q_i = \max(0; S \dot{X}(t)) = \frac{S}{2} (\dot{X} + |\dot{X}|) = \frac{eS}{2} (\sin(\theta) + |\sin(\theta)|) |\dot{\theta}|$$

où pour ne garder que l'alternance positive de la translation, nous avons fait sa moyenne avec sa valeur absolue.

**Question 3.4.** Le débit moyen par piston est défini par :

$$\bar{Q}_i = \int_0^{2\pi} \frac{eS}{2} \omega (\sin(\theta) + |\sin(\theta)|) \, d\theta = eS\omega \left( \int_0^\pi \sin(\theta) \, d\theta + \int_\pi^{2\pi} 0 \, d\theta \right) = 2eS\omega$$

conduisant, par somme, au débit moyen avec 3 pistons

$$\boxed{\bar{Q} = 6eS |\dot{\theta}|}$$

Avec  $\dot{\theta} = 1\,000 \text{ tr/min} \approx 100 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ ,  $e = 10 \text{ mm}$  et  $D = 5 \text{ mm}$ , il vient :

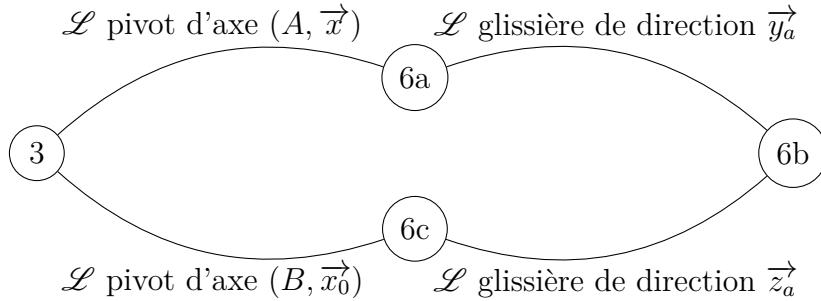
$$\bar{Q} = 6 \times 100 \times 10 \times 10^{-3} \times \frac{\pi(5 \times 10^{-3})^2}{4} = \frac{75\pi}{2} \text{ mm}^3\cdot\text{s}^{-1} \approx 7,5 \text{ L/min} \in [0,5; 20 \text{ L/min}]$$

avec l'approximation  $6\pi/2 \approx 10$ . Le résultat valide le cahier des charges.

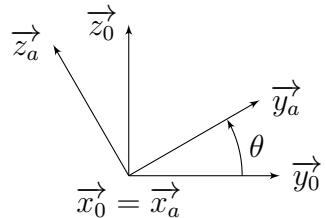
— EXERCICE 4 —

## Transmission homocinétique par joint de Oldham

**Question 4.1.**



Les pièces **6a**, **6b** et **6c** étant en liaisons glissières, il est clair que les bases associées  $\mathcal{B}_a$ ,  $\mathcal{B}_b$  et  $\mathcal{B}_c$  sont confondues et que l'on a  $\theta = \alpha$  tel que :



**Question 4.2.** Par définition, on a :

— liaison pivot d'axe ( $A, \vec{x}_0$ ) entre **3** et **6a** :

$$\forall M \in (A, \vec{x}_0), \quad \{\mathcal{V}_{6a/3}\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta} \vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

— liaison glissière de direction  $\vec{y}_a$  entre **6a** et **6b** :

$$\forall M, \quad \{\mathcal{V}_{6b/6a}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ v \vec{y}_a \end{array} \right\}$$

— liaison glissière de direction  $\vec{z}_a$  entre **6b** et **6c** :

$$\forall M, \quad \{\mathcal{V}_{6c/6b}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ w \vec{z}_a \end{array} \right\}$$

— liaison pivot d'axe ( $B, \vec{x}_0$ ) entre **3** et **6c** :

$$\forall M \in (B, \vec{x}_0), \quad \{\mathcal{V}_{6c/3}\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\alpha} \vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

**Question 4.3.** Par composition des taux de rotation, il vient immédiatement :

$$\overrightarrow{\Omega_{6c/3}} = \overrightarrow{\Omega_{6c/6b}} + \overrightarrow{\Omega_{6b/6a}} + \overrightarrow{\Omega_{6a/3}} \iff \dot{\alpha} \vec{x}_0 = \dot{\theta} \vec{x}_0 \iff \dot{\alpha} = \dot{\theta}$$

**Question 4.4.** Comme les vitesses de rotation d'entrée et de sortie du joint de Oldham sont égales, alors le joint de Oldham est homocinétique.

**Question 4.5.** Pour déterminer une expression de la vitesse de translation  $\overrightarrow{V_{*,6a/6b}} = -v \vec{y}_a$  en fonction de  $\theta$  et  $\dot{\theta}$  associé à la liaison pivot entre **3** et **6a**, il suffit de composer les vitesses au point *B* appartenant à l'axe de la liaison pivot entre **6c** et **3** (tel qu'il n'y ait pas de  $\dot{\alpha}$ ) et de projeter dans la direction  $\vec{y}_a$  de façon à ne pas faire intervenir la vitesse entre **6b** et **6c** ; soit :

$$\underbrace{\overrightarrow{V_{B,6c/3}} \cdot \vec{y}_a}_{\vec{0}} = \underbrace{\overrightarrow{V_{B,6c/6b}} \cdot \vec{y}_a}_0 + \underbrace{\overrightarrow{V_{B,6b/6a}} \cdot \vec{y}_a}_v + \underbrace{\overrightarrow{V_{B,6a/3}} \cdot \vec{y}_a}_0$$

Par relation de changement de point, on a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V_{B,6a/3}} &= \overrightarrow{V_{A,6a/3}} + \overrightarrow{\Omega_{6a/3}} \wedge \overrightarrow{AB} \\ &= \dot{\theta} \vec{x}_0 \wedge (f \vec{y}_0 - e \vec{x}_0) \\ &= f \dot{\theta} \vec{z}_0 \end{aligned}$$

d'où :

$$v = -f \sin(\theta) \dot{\theta}$$

**Question 4.6.** De la même façon, pour déterminer une expression de la vitesse de translation  $\overrightarrow{V_{*,6b/6c}} = -w \vec{z}_a$  en fonction de  $\alpha$  et  $\dot{\alpha}$  associé à la liaison pivot entre **3** et **6c**, il suffit de composer les vitesses au point *A* appartenant à l'axe de la liaison pivot entre **6a** et **3** (tel qu'il n'y ait pas de  $\dot{\theta}$ ) et de projeter dans la direction  $\vec{z}_a$  de façon à ne pas faire intervenir la vitesse entre **6a** et **6b** ; soit :

$$\overrightarrow{V_{A,6c/3}} \cdot \vec{z}_a = \underbrace{\overrightarrow{V_{A,6c/6b}} \cdot \vec{z}_a}_w + \underbrace{\overrightarrow{V_{B,6b/6a}} \cdot \vec{z}_a}_0 + \underbrace{\overrightarrow{V_{A,6a/3}} \cdot \vec{z}_a}_{\vec{0}}$$

Par relation de changement de point, on a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V_{A,6c/3}} &= \overrightarrow{V_{B,6c/3}} + \overrightarrow{\Omega_{6c/3}} \wedge \overrightarrow{BA} \\ &= \dot{\alpha} \vec{x}_0 \wedge (e \vec{x}_0 - f \vec{y}_0) \\ &= -f \dot{\alpha} \vec{z}_0 \end{aligned}$$

d'où, avec  $\dot{\alpha} = \dot{\theta}$  :

$$w = -f \cos(\theta) \dot{\theta}$$

**Question 4.7.** Des deux questions précédentes, on voit que si  $f \neq 0$  alors **6b** est en translation par rapport à **6a** et **6c** aux vitesses

$$\begin{cases} v = -f \sin(\theta) \dot{\theta} \\ w = -f \cos(\theta) \dot{\theta} \end{cases}$$

qui, à vitesse de rotation  $\dot{\theta}$  constante, ont une valeur moyenne nulle sur un tour. Ce sont les deux rainures de l'élément intermédiaire **6b** qui permettent de guider ces translations. On notera que par composition des champs de translation, on a :

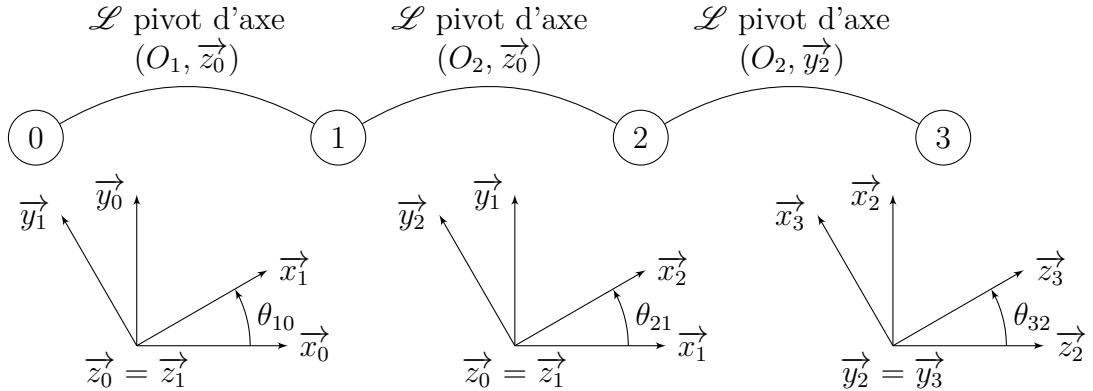
$$\overrightarrow{V_{\star,6c/6a}} = \overrightarrow{V_{\star,6c/6b}} + \overrightarrow{V_{\star,6b/6a}} = -f\dot{\theta}(\sin(\theta)\overrightarrow{y_a} + \cos(\theta)\overrightarrow{z_a}) = -f\dot{\theta}\overrightarrow{z_0}$$

qui signifie que, à vitesse de rotation constante avec  $f \neq 0$ , **6c** est en translation perpétuelle dans la direction de l'entraxe  $\overrightarrow{z_0}$  à la vitesse de norme

$$\left\| \overrightarrow{V_{\star,6c/6a}} \right\| = |f\dot{\theta}| > 0$$

— EXERCICE 5 —  
**Attraction Magic Arms**

**Question 5.1.**



Les expressions canoniques de torseurs cinématiques sont :

— liaison pivot d'axe  $(O_1, \vec{z}_0)$  :

$$\forall M \in (O_1, \vec{z}_1), \left\{ \mathcal{V}_{1/0} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta}_{10} \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

— liaison pivot d'axe  $(O_2, \vec{z}_1)$  :

$$\forall M \in (O_2, \vec{z}_1), \left\{ \mathcal{V}_{2/1} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta}_{21} \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

— liaison pivot d'axe  $(O_2, \vec{y}_2)$  :

$$\forall M \in (O_2, \vec{y}_2), \left\{ \mathcal{V}_{3/2} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta}_{32} \vec{y}_2 \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

**Question 5.2.** Par composition des vitesses au point  $P$ , on a :

$$\overrightarrow{V_{P,3/0}} = \overrightarrow{V_{P,3/2}} + \overrightarrow{V_{P,2/1}} + \overrightarrow{V_{P,1/0}}$$

avec, par changement de point :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{V_{P,3/2}} &= \overrightarrow{V_{O_2,3/2}} + \overrightarrow{\Omega_{3/2}} \wedge \overrightarrow{O_2 P} \\
&= \dot{\theta}_{32} \overrightarrow{y_2} \wedge -(\ell_2 \overrightarrow{y_2} + \ell_3 \overrightarrow{z_3}) \\
&= -\dot{\theta}_{32} \ell_3 \overrightarrow{x_3} \\
\overrightarrow{V_{P,2/1}} &= \overrightarrow{V_{O_2,2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \wedge \overrightarrow{O_2 P} \\
&= \dot{\theta}_{21} \overrightarrow{z_1} \wedge -(\ell_2 \overrightarrow{y_2} + \ell_3 \overrightarrow{z_3}) \\
&= \dot{\theta}_{21} (\ell_2 \overrightarrow{x_2} - \ell_3 \sin(\theta_{32}) \overrightarrow{y_2}) \\
\overrightarrow{V_{P,1/0}} &= \overrightarrow{V_{O_1,1/0}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{O_1 P} \\
&= \dot{\theta}_{10} \overrightarrow{z_1} \wedge -(\ell_1 \overrightarrow{y_1} + \ell_2 \overrightarrow{y_2} + \ell_3 \overrightarrow{z_3}) \\
&= \dot{\theta}_{10} (\ell_1 \overrightarrow{x_1} + \ell_2 \overrightarrow{x_2} - \ell_3 \sin(\theta_{32}) \overrightarrow{y_2})
\end{aligned}$$

Par somme, il vient alors :

$$\boxed{\overrightarrow{V_{P,3/0}} = \dot{\theta}_{10} \ell_1 \overrightarrow{x_1} + (\dot{\theta}_{10} + \dot{\theta}_{21}) [\ell_2 \overrightarrow{x_2} - \ell_3 \sin(\theta_{32}) \overrightarrow{y_2}] - \dot{\theta}_{32} \ell_3 \overrightarrow{x_3}}$$

**Question 5.3.** À partir de la figure 3, il vient :

— l'allure de  $\dot{\theta}_{10}$  montre 2 segments :

1.  $\forall t \in [0, 9]$  :

$$\ddot{\theta}_{10} = \frac{0,84}{9} \implies \dot{\theta}_{10}(t) = \frac{0,84}{9}t \implies \theta_{10}(t) = \theta_{10}(0) + \int_0^t \frac{0,84}{9}x \, dx = \frac{0,84t^2}{18}$$

2.  $\forall t \in [9, 27]$  :

$$\dot{\theta}_{10} = 0,84 \implies \theta_{10}(t) = \theta_{10}(9) + \int_9^t 0,84 \, dx = 0,84 \times \left(t - \frac{9}{2}\right)$$

— l'allure de  $\dot{\theta}_{21}$  montre 3 segments :

1.  $\forall t \in [0, 9]$  :

$$\dot{\theta}_{21} = 0 \implies \theta_{21}(t) = 0$$

2.  $\forall t \in [9, 17]$  :

$$\ddot{\theta}_{21} = \frac{0,94}{17 - 9} \implies \dot{\theta}_{21}(t) = \frac{0,94}{8} (t - 9)$$

d'où

$$\theta_{21}(t) = \theta_{21}(9) + \int_9^t \frac{0,94}{8} (x - 9) \, dx = \frac{0,94 (t - 9)^2}{16}$$

3.  $\forall t \in [17, 27]$  :

$$\dot{\theta}_{21} = 0,94 \implies \theta_{21}(t) = \theta_{21}(17) + \int_{17}^t 0,94 \, dx = 0,94 \times \left(t - \frac{26}{2}\right)$$

— l'allure de  $\dot{\theta}_{32}$  montre 1 segment :

1.  $\forall t \in [0, 27]$  :

$$\dot{\theta}_{32} = -0,628 \implies \theta_{32}(t) = \theta_{32}(0) + \int_0^t -0,628 \, dx = -0,628t$$

**Question 5.4.** Pour  $t = 19,8$  s, on a :

$$\begin{aligned}\theta_{10}(19,8) &= 0,84 \times \left(19,8 - \frac{9}{2}\right) \approx 12,85 \equiv 0,28 [2\pi] \\ \theta_{21}(19,8) &= 0,94 \times \left(19,8 - \frac{26}{2}\right) \approx 6,39 \equiv 0,10 [2\pi] \\ \theta_{32}(19,8) &= -0,628 \times 19,8 \approx -12,43 \equiv 0,13 [2\pi]\end{aligned}$$

Ces résultats sont cohérents avec les valeurs lues sur la figure 4.

**Question 5.5.** Par définition, on a :

$$\left\| \overrightarrow{V_{P,3/0}} \right\| = \sqrt{\overrightarrow{V_{P,3/0}} \cdot \overrightarrow{V_{P,3/0}}}$$

Avec les produits scalaires

$$\begin{aligned}\overrightarrow{x_1} \cdot \overrightarrow{x_2} &= \cos(\theta_{21}) & \overrightarrow{x_2} \cdot \overrightarrow{y_2} &= 0 & \overrightarrow{y_2} \cdot \overrightarrow{x_3} &= 0 \\ \overrightarrow{x_1} \cdot \overrightarrow{y_2} &= -\sin(\theta_{21}) & \overrightarrow{x_2} \cdot \overrightarrow{x_3} &= \cos(\theta_{32}) \\ \overrightarrow{x_1} \cdot \overrightarrow{x_3} &= \cos(\theta_{32}) \cos(\theta_{21})\end{aligned}$$

il vient :

$$\begin{aligned}\left\| \overrightarrow{V_{P,3/0}} \right\|^2 &= (\dot{\theta}_{10}\ell_1)^2 + (\dot{\theta}_{10} + \dot{\theta}_{21})^2 [\ell_2^2 + (\ell_3 \sin(\theta_{32}))^2] + (\dot{\theta}_{32}\ell_3)^2 \\ &\quad + 2\ell_1\dot{\theta}_{10} [(\dot{\theta}_{10} + \dot{\theta}_{21}) [\ell_2 \cos(\theta_{21}) + \ell_3 \sin(\theta_{32}) \sin(\theta_{21})] - \dot{\theta}_{32}\ell_3 \cos(\theta_{32}) \cos(\theta_{21})] \\ &\quad - 2\ell_2\ell_3 (\dot{\theta}_{10} + \dot{\theta}_{21}) \dot{\theta}_{32} \cos(\theta_{32})\end{aligned}$$

À l'instant  $t = 19,8$  s, avec le code python suivant

```
import math as ma
l_1 = 3.90 ; l_2 = 2.87 ; l_3 = 2.61
theta_10 = .28 ; theta_10p = .84
theta_21 = .10 ; theta_21p = .94
theta_32 = .13 ; theta_32p = -.628
VP30 = ma.sqrt(
    (l_1*theta_10p)**2
    + (theta_10p+theta_21p)**2*(l_2**2+(l_3*ma.sin(theta_32))**2)
    + (l_3*theta_32p)**2
    + 2*l_1*theta_10p*
        (theta_10p+theta_21p)*(l_2*ma.cos(theta_21)
        + l_3*ma.sin(theta_32)*ma.sin(theta_21)))
```

```

    - theta_32p*l_3*ma.cos(theta_32)*ma.cos(theta_21)
)
- 2*l_2*l_3*(theta_10p+theta_21p)*theta_32p*ma.cos(theta_32)
)

```

on trouve

$$\|\overrightarrow{V_{P,3/0}}\| \approx 10,03 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

qui correspond bien à ce qui est observé sur le graphe de la figure 5. Cette vitesse est maximale car à cet instant les trois vitesses de rotation ont valeur absolue maximale.

**Question 5.6.** Sur la figure 3, on observe sur l'intervalle de temps [17;27] s que les valeurs de vitesses  $\dot{\theta}_{i/i-1}$ ,  $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$ , sont constantes d'où, par dérivation :

$$\forall i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket, \ddot{\theta}_{i/i-1} = 0$$

**Question 5.7.** par définition, on a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\Gamma_{P,3/0}} = \frac{d\overrightarrow{V_{P,3/0}}}{dt}(t) \Big|_{\mathcal{B}_0} &= \dot{\theta}_{10}\ell_1 \frac{d\overrightarrow{x_1}}{dt} \Big|_{\mathcal{B}_0} + (\dot{\theta}_{10} + \dot{\theta}_{21}) \left[ \ell_2 \frac{d\overrightarrow{x_2}}{dt} \Big|_{\mathcal{B}_0} \right. \\ &\quad \left. - \ell_3 \left( \cos(\theta_{32})\dot{\theta}_{32}\overrightarrow{y_2} + \sin(\theta_{32}) \frac{d\overrightarrow{y_2}}{dt} \Big|_{\mathcal{B}_0} \right) \right] - \dot{\theta}_{32}\ell_3 \frac{d\overrightarrow{x_3}}{dt} \Big|_{\mathcal{B}_0} \end{aligned}$$

où nous avons exploité le fait que les accélérations angulaires sont nulles dans l'intervalle de temps [17;27] s. Avec les dérivées de vecteurs de base

$$\begin{aligned} \frac{d\overrightarrow{x_1}}{dt} \Big|_{\mathcal{B}_0} &= \frac{d\overrightarrow{x_1}}{dt} \Big|_{\mathcal{B}_1} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{x_1} = \dot{\theta}_{10}\overrightarrow{z_0} \wedge \overrightarrow{x_1} = \dot{\theta}_{10}\overrightarrow{y_1} \\ \frac{d\overrightarrow{x_2}}{dt} \Big|_{\mathcal{B}_0} &= \frac{d\overrightarrow{x_2}}{dt} \Big|_{\mathcal{B}_2} + \overrightarrow{\Omega_{2/0}} \wedge \overrightarrow{x_2} = (\dot{\theta}_{21} + \dot{\theta}_{10})\overrightarrow{z_0} \wedge \overrightarrow{x_2} = (\dot{\theta}_{21} + \dot{\theta}_{10})\overrightarrow{y_2} \\ \frac{d\overrightarrow{y_2}}{dt} \Big|_{\mathcal{B}_0} &= \frac{d\overrightarrow{y_2}}{dt} \Big|_{\mathcal{B}_2} + \overrightarrow{\Omega_{2/0}} \wedge \overrightarrow{x_2} = (\dot{\theta}_{21} + \dot{\theta}_{10})\overrightarrow{z_0} \wedge \overrightarrow{y_2} = -(\dot{\theta}_{21} + \dot{\theta}_{10})\overrightarrow{x_2} \\ \frac{d\overrightarrow{x_3}}{dt} \Big|_{\mathcal{B}_0} &= \frac{d\overrightarrow{x_3}}{dt} \Big|_{\mathcal{B}_3} + \overrightarrow{\Omega_{3/0}} \wedge \overrightarrow{x_3} = [(\dot{\theta}_{21} + \dot{\theta}_{10})\overrightarrow{z_0} + \dot{\theta}_{32}\overrightarrow{y_2}] \wedge \overrightarrow{x_3} = (\dot{\theta}_{21} + \dot{\theta}_{10})\cos(\theta_{32})\overrightarrow{y_2} - \dot{\theta}_{32}\overrightarrow{z_3} \end{aligned}$$

il vient

$$\overrightarrow{\Gamma_{P,3/0}} = \dot{\theta}_{10}^2\ell_1\overrightarrow{y_1} + (\dot{\theta}_{10} + \dot{\theta}_{21})^2(\ell_2 + \ell_3\sin(\theta_{32}))\overrightarrow{y_2} - 2\ell_3\dot{\theta}_{32}(\dot{\theta}_{21} + \dot{\theta}_{10})\cos(\theta_{32})\overrightarrow{y_2} + \dot{\theta}_{32}^2\ell_3\overrightarrow{z_3}$$

**Question 5.8.** Avec la courbe de la figure 6, on trouve dans l'intervalle de temps [17;27] s que l'accélération est maximale à l'instant

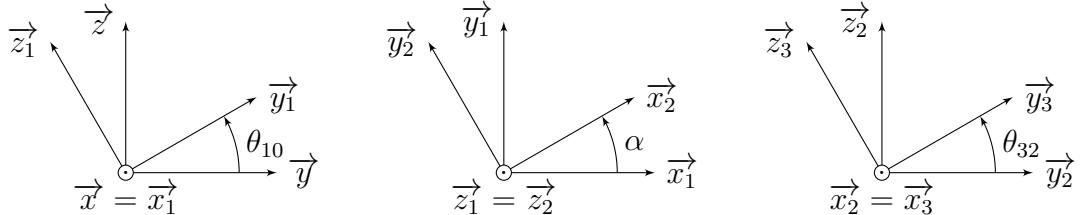
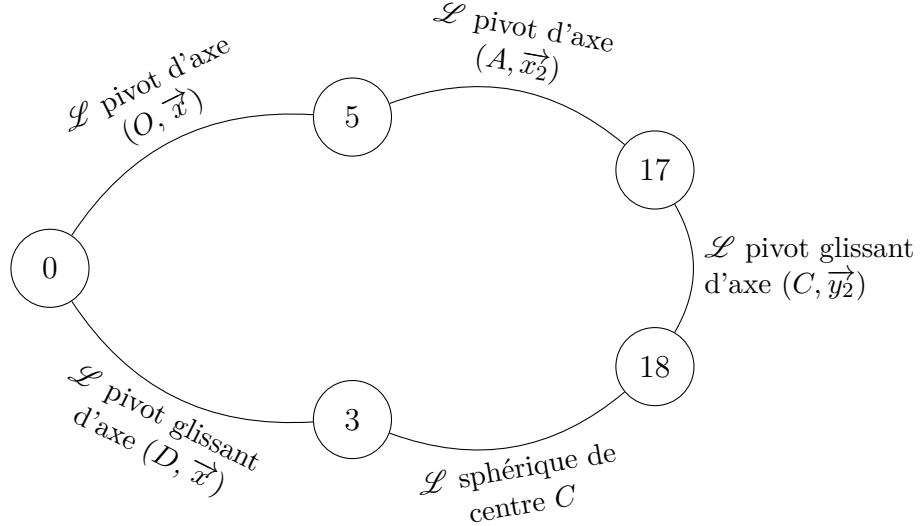
$$t = 19,8 \text{ s}$$

**Question 5.9.** En  $t = 19,8 \text{ s}$ , on relève les éléments demandés dans le diagramme d'exigences :

- vitesse absolue  $> 30 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$  : validé, car la valeur max est de  $36 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$  ( $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ) ;
- accélération absolue de la nacelle  $> 1 \text{ g}$  : validé, car la valeur max est de  $18 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  ce qui est bien supérieur à  $1 \text{ g}$  ( $9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ) ;
- accélération absolue de la nacelle  $< 3 \text{ g}$  : validé, car la valeur max est de  $18 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  ce qui est bien inférieur à  $3 \text{ g}$  ( $28 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ) ;
- jerk absolu de la nacelle  $< 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-3}$  : vérifié car si on calcule la pente la plus grande du tracé de l'accélération on la retrouve inférieure à la valeur max demandée.

— EXERCICE 6 —  
**Modélisation d'une encapsuleuse**

**Question 6.1.**



Les expressions canoniques de torseurs cinématiques sont :

— liaison pivot d'axe  $(O, \vec{x})$  :

$$\forall M \in (O, \vec{x}), \left\{ \mathcal{V}_{5/0} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta}_{10} \vec{x} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

— liaison pivot d'axe  $(A, \vec{x}_2)$  :

$$\forall M \in (A, \vec{x}_2), \left\{ \mathcal{V}_{17/5} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta}_{21} \vec{x}_2 \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

— liaison pivot glissant d'axe  $(C, \vec{y}_2)$  :

$$\forall M \in (C, \vec{y}_2), \left\{ \mathcal{V}_{18/17} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} q_{18/17} \vec{y}_2 \\ v_{18/17} \vec{y}_2 \end{array} \right\}$$

— liaison sphérique de centre  $C$

$$\left\{ \mathcal{V}_{3/18} \right\} = \underset{C}{\left\{ \begin{array}{c} p_{3/18} \vec{x}_2 + q_{3/18} \vec{y}_2 + r_{3/18} \vec{z}_2 \\ \vec{0} \end{array} \right\}}$$

— liaison pivot glissant d'axe  $(D, \vec{x}')$  :

$$\forall M \in (D, \vec{x}'), \left\{ \mathcal{V}_{3/0} \right\} = \underset{M}{\left\{ \begin{array}{c} p_{3/0} \vec{x}' \\ u_{3/0} \vec{x}' \end{array} \right\}}$$

**Question 6.2.** Par composition des champs de vitesses, on a

$$\left\{ \mathcal{V}_{3/17} \right\} = \left\{ \mathcal{V}_{3/18} \right\} + \left\{ \mathcal{V}_{18/17} \right\} = \underset{C}{\left\{ \begin{array}{c} p_{3/18} \vec{x}_2 + (q_{3/18} + q_{18/17}) \vec{y}_2 + r_{3/18} \vec{z}_2 \\ v_{18/17} \vec{y}_2 \end{array} \right\}}$$

Comme le point  $C$  appartient à la fois à l'axe central de  $\{\mathcal{V}_{18/17}\}$  (la droite  $(C, \vec{y}_2)$ ) et à l'axe central de  $\{\mathcal{V}_{3/18}\}$  (la droite  $(C, \vec{\Omega}_{3/18})$ ), alors  $C$  est un point de l'axe central de  $\{\mathcal{V}_{3/17}\}$ . Par conséquent, il est possible d'identifier la liaison à partir des éléments de réduction canoniques au point  $C$ .

On identifie alors comme liaison équivalente une liaison sphère-cylindre de centre  $C$  et d'axe  $(C, \vec{y}_2)$ . Elle possède 4 degrés de liberté et une mobilité interne : la rotation autour de l'axe  $(C, \vec{y}_2)$ , paramétrée avec 2 inconnues.

**Question 6.3.**

**Question 6.4.** Par composition des vitesses au point  $O$ , on a :

$$\overrightarrow{V_{O,17/5}} + \underbrace{\overrightarrow{V_{O,5/0}}}_{\vec{0}} = \underbrace{\overrightarrow{V_{O,17/18}} + \overrightarrow{V_{O,18/3}}}_{\overrightarrow{V_{O,17/3}}} + \overrightarrow{V_{O,3/0}}$$

Par relation de changement de point, il vient :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V_{O,17/5}} &= \overrightarrow{V_{A,17/5}} + \overrightarrow{\Omega_{17/5}} \wedge \overrightarrow{AO} \\ &= \dot{\theta}_{21} \vec{x}_2 \wedge -\ell \vec{x} \\ &= \ell \sin(\alpha) \dot{\theta}_{21} \vec{z}_1 \\ \overrightarrow{V_{O,17/3}} &= \overrightarrow{V_{C,17/3}} + \overrightarrow{\Omega_{17/3}} \wedge \overrightarrow{CO} \\ &= v_{17/3} \vec{y}_2 + (p_{17/3} \vec{x} + q_{17/3} \vec{y} + r_{17/3} \vec{z}) \wedge (-x_{30} \vec{x} - r \vec{y}) \\ &= v_{17/3} \vec{y}_2 + rr_{17/3} \vec{x} - x_{30}r_{17/3} \vec{y} + (x_{30}q_{17/3} - rp_{17/3}) \vec{z} \\ \overrightarrow{V_{O,3/0}} &= \overrightarrow{V_{D,3/0}} + \overrightarrow{\Omega_{3/0}} \wedge \overrightarrow{DO} \\ &= u_{3/0} \vec{x} + p_{3/0} \vec{x} \wedge (-L \vec{x} - r \vec{y}) \\ &= u_{3/0} \vec{x} - rp_{3/0} \vec{z} \end{aligned}$$

d'où, avec

$$\vec{z}_1 = \cos(\theta_{10}) \vec{z} - \sin(\theta_{10}) \vec{y}$$

et

$$\vec{y}_2 = \cos(\alpha) \vec{y}_1 - \sin(\alpha) \vec{x} = \cos(\alpha) (\cos(\theta_{10}) \vec{y} + \sin(\theta_{10}) \vec{z}) - \sin(\alpha) \vec{x}$$

il vient les projections dans la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  :

$$\begin{cases} / \vec{x} : & 0 = -v_{17/3} \sin(\alpha) + rr_{17/3} + u_{3/0} \\ / \vec{y} : & -\ell \sin(\alpha) \sin(\theta_{10}) \dot{\theta}_{21} = v_{17/3} \cos(\alpha) \cos(\theta_{10}) - x_{30} r_{17/3} \\ / \vec{z} : & \ell \sin(\alpha) \cos(\theta_{10}) \dot{\theta}_{21} = v_{17/3} \cos(\alpha) \sin(\theta_{10}) + (x_{30} q_{17/3} - rp_{17/3}) + rp_{3/0} \end{cases}$$

**Question 6.5.** Il n'est pas possible d'utiliser la composition des vitesses au point  $O$  pour déterminer une expression de  $\dot{x}_{30} = u_{3/0}$  en fonction de  $\dot{\theta}_{10}$  car ce dernier n'apparaît pas car  $\overrightarrow{V_{O,5/0}} = \vec{0}$ . Pour obtenir une telle relation, il serait intéressant de se placer au point  $C$  et de projeter la relation dans la direction  $\vec{x}_2$  tel que l'on ait :

$$\underbrace{\overrightarrow{V_{C,17/5}} \cdot \vec{x}_2}_{0} + \overrightarrow{V_{C,5/0}} \cdot \vec{x}_2 = \underbrace{\overrightarrow{V_{C,17/3}} \cdot \vec{x}_2}_{0} + \underbrace{\overrightarrow{V_{C,3/0}} \cdot \vec{x}_2}_{u_{3/0} \cos(\alpha)} \iff u_{3/0} \cos(\alpha) = \overrightarrow{V_{C,5/0}} \cdot \vec{x}_2$$

car

— comme  $\overrightarrow{\Omega_{17/5}} = \dot{\theta}_{21} \vec{x}_2$ , alors

$$\forall \vec{v}, (\overrightarrow{\Omega_{17/5}} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{x}_2 = 0$$

et donc pour  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ , tel que  $\overrightarrow{V_{C,17/5}} \cdot \vec{x}_2 = 0$  ;

—  $\overrightarrow{V_{C,17/3}} = u_{17/3} \vec{y}_2 \perp \vec{x}_2$  ;

— comme  $C \in (D, \vec{x})$  alors on a

$$\overrightarrow{V_{C,3/0}} = \overrightarrow{V_{D,3/0}} = u_{3/0} \vec{x}$$

d'où

$$\overrightarrow{V_{C,3/0}} \cdot \vec{x}_2 = u_{3/0} \cos(\alpha)$$

Il ne reste à calculer que la projection dans la direction  $\vec{x}_2$  de  $\overrightarrow{V_{C,5/0}}$ . Par relation de changement de point, on a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V_{C,5/0}} &= \overrightarrow{V_{O,5/0}} + \overrightarrow{\Omega_{5/0}} \wedge \overrightarrow{OC} \\ &= \dot{\theta}_{10} \vec{x} \wedge (x_{30} \vec{x} + r \vec{y}) \\ &= r \dot{\theta}_{10} \vec{z} \end{aligned}$$

d'où, avec

$$\vec{z} \cdot \vec{x}_2 = \sin(\theta_{10}) \vec{y}_1 \cdot \vec{x}_2 = \sin(\theta_{10}) \sin(\alpha) \quad \text{car} \quad \vec{z}_1 \perp \vec{x}_2$$

il vient finalement

$$u_{3/0} \cos(\alpha) = r \sin(\theta_{10}) \sin(\alpha) \dot{\theta}_{10} \iff \boxed{u_{3/0} = r \sin(\theta_{10}) \tan(\alpha) \dot{\theta}_{10}}$$

**Question 6.6.** La vitesse de rotation  $\dot{\theta}_{10}$  maximale permettant de respecter le cahier des charges est obtenue lorsque  $\theta_{10} \equiv \pi/2$  [ $\pi$ ], d'où, supposant  $\alpha \in ]0, \pi/2]$  :

$$r \tan(\alpha) |\dot{\theta}_{10}| \leq v_{\max} \iff |\dot{\theta}_{10}| \leq \frac{v_{\max}}{r \tan(\alpha)}$$

d'où

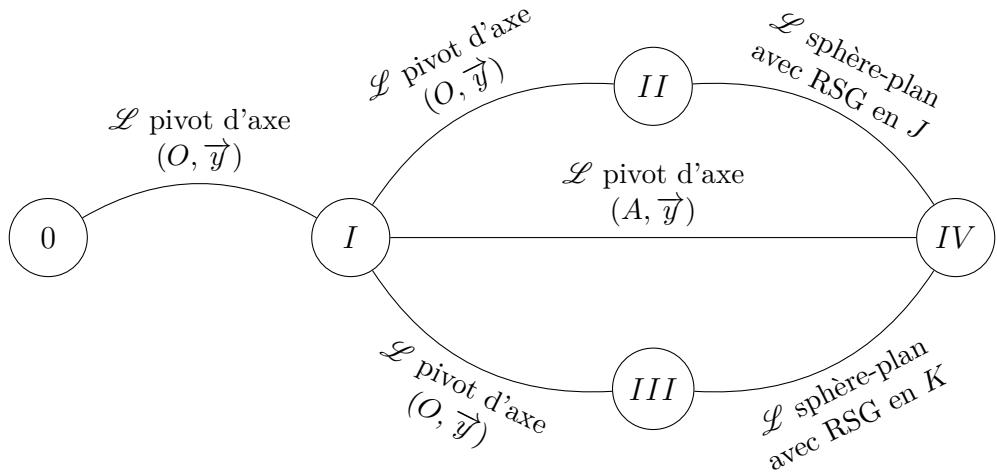
$$|\dot{\theta}_{10}|_{\max} = \frac{v_{\max}}{r \tan(\alpha)} = \frac{0,12}{115 \times 10^{-3} \tan(\alpha)} \approx \frac{1}{\tan(\alpha)}$$

— EXERCICE 7 —

## Planeuse sous traction pour bandes d'acier inoxydable

### 7.1 Étude du différentiel

Avant de commencer l'étude cinématique, il est nécessaire de réaliser un graphe de structure du différentiel :



**Question 7.1.** La condition de roulement sans glissement au point  $J$  s'écrit

$$\overrightarrow{V_{J,IV/II}} = \overrightarrow{0}$$

Par composition des vitesses au point  $J$ , il vient

$$\overrightarrow{V_{J,IV/I}} = \overrightarrow{V_{J,IV/I}} - \overrightarrow{V_{J,II/I}} = \overrightarrow{0}$$

Par changement de point, il vient :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V_{J,IV/I}} &= \overrightarrow{V_{A,IV/I}} + \overrightarrow{\Omega_{IV/I}} \wedge \overrightarrow{AJ} \\ &= \omega_{IV/I} \overrightarrow{y} \wedge \frac{-m\beta}{2} \overrightarrow{z} \\ &= \frac{-m\beta}{2} \omega_{IV/I} \overrightarrow{x} \\ \overrightarrow{V_{J,II/I}} &= \overrightarrow{V_{O,II/I}} + \overrightarrow{\Omega_{II/I}} \wedge \overrightarrow{OJ} \\ &= \omega_{II/I} \overrightarrow{y} \wedge \frac{m\alpha}{2} \overrightarrow{z} \\ &= \frac{m\alpha}{2} \omega_{II/I} \overrightarrow{x} \end{aligned}$$

Il vient alors dans la direction  $\overrightarrow{x}$  :

$$/ \overrightarrow{x} : \boxed{\omega_{IV/I} = -\frac{\alpha}{\beta} \omega_{II/I}}$$

**Question 7.2.** De façon similaire, la condition de roulement sans glissement au point  $K$  s'écrit

$$\overrightarrow{V_{K,IV/III}} = \overrightarrow{0}$$

Par composition des vitesses au point  $K$ , il vient

$$\overrightarrow{V_{K,IV/III}} = \overrightarrow{V_{K,IV/I}} - \overrightarrow{V_{K,III/I}} = \overrightarrow{0}$$

Par changement de point, il vient :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V_{K,IV/I}} &= \overrightarrow{V_{B,IV/I}} + \overrightarrow{\Omega_{IV/I}} \wedge \overrightarrow{BK} \\ &= \omega_{IV/I} \overrightarrow{y} \wedge \frac{-m\gamma}{2} \overrightarrow{z} \\ &= \frac{-m\gamma}{2} \omega_{IV/I} \overrightarrow{x} \\ \overrightarrow{V_{K,III/I}} &= \overrightarrow{V_{C,III/I}} + \overrightarrow{\Omega_{III/I}} \wedge \overrightarrow{CK} \\ &= \omega_{III/I} \overrightarrow{y} \wedge \frac{m\delta}{2} \overrightarrow{z} \\ &= \frac{m\delta}{2} \omega_{III/I} \overrightarrow{x} \end{aligned}$$

Il vient alors dans la direction  $\overrightarrow{x}$  :

$$\boxed{\overrightarrow{x} : \omega_{IV/I} = -\frac{\delta}{\gamma} \omega_{III/I}}$$

**Question 7.3.** Comme toutes les liaisons pivot ont des axes parallèles, on a par composition des taux de rotation, on a :

$$\forall x \in \{II, III\}, \overrightarrow{\Omega_{x/I}} = \overrightarrow{\Omega_{x/0}} - \overrightarrow{\Omega_{I/0}} \iff \omega_{x/I} = \omega_x - \omega_I$$

Ainsi, des résultats aux deux questions précédentes, on en déduit

$$\begin{cases} \omega_{IV/I} = -\frac{\alpha}{\beta} (\omega_{II} - \omega_I) \\ \omega_{IV/I} = -\frac{\delta}{\gamma} (\omega_{III} - \omega_I) \end{cases} \implies \frac{\alpha}{\beta} (\omega_{II} - \omega_I) = \frac{\delta}{\gamma} (\omega_{III} - \omega_I)$$

Après regroupement des termes, il vient finalement :

$$\boxed{\omega_{II} = (1 - \lambda) \omega_I + \lambda \omega_{III}, \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{\delta\beta}{\alpha\gamma} \quad \text{la raison basique du train}}$$

**Question 7.4.** D'après la table des correspondances pour le paramétrage, on trouve :

$$\boxed{\omega_5 = (1 - \lambda) \omega_4 + \lambda \omega_6}$$

## 7.2 Mouvement principal et allongement

**Question 7.5.** La vitesse linéaire en sortie  $V_s$  est définie par

$$V_s = R_s \omega_s$$

Sachant

$$k_s = \frac{\omega_s}{\omega_1} \iff \omega_s = k_s \omega_1$$

il vient par substitution :

$$V_s = k_s R_s \omega_1$$

**Question 7.6.** Partant de

$$\omega_5 = (1 - \lambda) \omega_4 + \lambda \omega_6$$

avec

$$\omega_6 = k_1 \omega_1, \quad \text{et} \quad \omega_4 = k_2 \omega_2$$

par simples substitutions, il vient :

$$\omega_5 = (1 - \lambda) k_2 \omega_2 + \lambda k_1 \omega_1$$

**Question 7.7.** Sachant

$$\begin{cases} k_E = \frac{\omega_E}{\omega_5} \\ V_e = R_e \omega_E \end{cases} \iff \begin{cases} \omega_5 = \frac{\omega_E}{k_E} \\ \omega_E = \frac{V_e}{R_e} \end{cases} \implies \omega_5 = \frac{V_e}{k_E R_e}$$

par simple substitution, il vient :

$$V_e = k_E R_e [(1 - \lambda) k_2 \omega_2 + \lambda k_1 \omega_1]$$

**Question 7.8.** Avec les résultats précédents, on a :

$$V_s - V_e = k_s R_s \omega_1 - k_E R_e [(1 - \lambda) k_2 \omega_2 + \lambda k_1 \omega_1]$$

Sachant que l'on veut

$$V_s - V_e = a \omega_2$$

on en déduit que pour tout  $\omega_1$  et  $\omega_2$  on doit avoir :

$$\begin{cases} \lambda = \frac{k_s R_s}{k_1 k_E R_e} \\ a = k_E R_e k_2 (\lambda - 1) \end{cases}$$

**Question 7.9.** Avec les nombres de dents  $\alpha = 38$  dents,  $\beta = 26$  dents,  $\gamma = 23$  dents,  $\delta = 35$  dents, il vient la raison basique

$$\lambda = \frac{\delta \beta}{\alpha \gamma} = \frac{35 \times 26}{38 \times 23} \approx 1,04$$

Avec les paramètres de production  $V_s = 60 \text{ m} \cdot \text{min}^{-1} = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  et l'expression  $V_s = k_s R_s \omega_1$ , il vient

$$\omega_1 = \frac{V_s}{k_s R_s} = \frac{1 \times 155}{7 \times 0,15} \approx 147,6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Avec la valeur d'allongement

$$\epsilon = \frac{V_s - V_e}{V_s} = \frac{a \omega_2}{V_s} = 2 \%$$

il vient

$$\omega_2 = \frac{2V_s}{100a} = \frac{2V_s}{100R_e k_E k_2 (\lambda - 1)} = \frac{2 \times 1 \times 9100 \times 93}{100 \times 0,1 \times 1311 \times 28 \times (1,04 - 1)} \approx 57,6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

— EXERCICE 8 —

**Robot Rovio**

**Question 8.1.** À chaque instant, on a

$$\|\overrightarrow{IA}\| = \|\overrightarrow{JB}\| = \|\overrightarrow{KC}\| = R$$

Or les points  $I$ ,  $J$  et  $K$  sont en contact avec le sol de normale  $\vec{z}_1$  donc

$$\begin{cases} A \in (I, \vec{z}_1) \implies \overrightarrow{IA} = R\vec{z}_1 \\ B \in (J, \vec{z}_1) \implies \overrightarrow{JB} = R\vec{z}_1 \\ C \in (K, \vec{z}_1) \implies \overrightarrow{KC} = R\vec{z}_1 \end{cases}$$

ce qui signifie que les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont situés dans un plan parallèle au sol (défini par les points  $I$ ,  $J$  et  $K$ , de normale  $\vec{z}_1$ ) et distant de  $R$  du sol. Le mouvement du corps **1** par rapport au sol **0** se fait donc dans des plans parallèles de normales  $\vec{z}_1$ , tel que :

$$\overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \omega_z \vec{z}_1 \quad \text{et} \quad \forall M, \overrightarrow{V_{M,1/0}} \cdot \vec{z}_1 = 0$$

d'où

$$\{\mathcal{V}_{1/0}\} = \left\{ \begin{array}{c} \omega_z \vec{z}_1 \\ V_x \vec{x}_1 + V_y \vec{y}_1 \end{array} \right\}$$

**Question 8.2.** En chaque point de contact, on a roulement sans glissement, ce qui se traduit au point  $I$  par

$$\overrightarrow{V_{I,11/0}} = \vec{0}$$

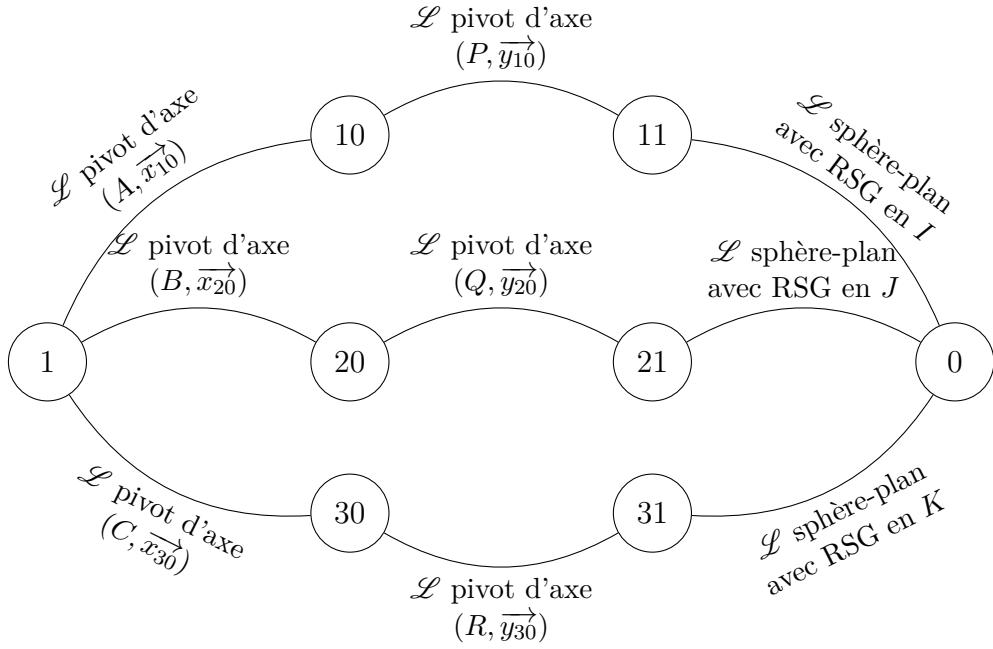
d'où

$$\{\mathcal{V}_{11/0}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{11/0}} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

Choisissez simplement la base  $(\vec{x}_{10}, \vec{y}_{10}, \vec{z}_1)$  pour exprimer les trois composantes du taux de rotation, il vient :

$$\{\mathcal{V}_{11/0}\} = \left\{ \begin{array}{c} \omega_{ix} \vec{x}_{10} + \omega_{iy} \vec{y}_{10} + \omega_{iz} \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

**Question 8.3.**



Les expressions canoniques de torseurs cinématiques sont :

— liaison pivot d'axe  $(A, \vec{x}_{10})$  :

$$\forall M \in (A, \vec{x}_{10}), \left\{ \mathcal{V}_{10/1} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \omega_{10} \vec{x}_{10} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

— liaison pivot d'axe  $(P, \vec{y}_{10})$  :

$$\forall M \in (P, \vec{y}_{10}), \left\{ \mathcal{V}_{11/10} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \omega_{11} \vec{y}_{10} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

— liaison sphère-plan avec roulement sans glissement en  $I$  :

$$\left\{ \mathcal{V}_{11/0} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{11/0} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

**Question 8.4.** Par composition des vitesses au point  $O_1$ , il vient :

$$\overrightarrow{V_{O_1,1/0}} = \overrightarrow{V_{O_1,1/10}} + \overrightarrow{V_{O_1,10/11}} + \overrightarrow{V_{O_1,11/0}}$$

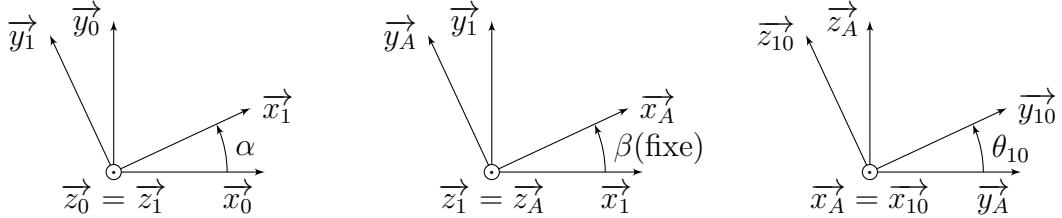
avec

$$\overrightarrow{V_{O_1,1/0}} = V_x \vec{x}_1 + V_y \vec{y}_1, \quad \text{et} \quad \overrightarrow{V_{O_1,1/10}} = \vec{0} \quad \text{car } O_1 \in (A, \vec{x}_{10})$$

et, par relations de changement de point :

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{V_{O_1,10/11}} &= \overrightarrow{V_{P,10/11}} + \overrightarrow{\Omega_{10/11}} \wedge \overrightarrow{PO_1} \\
 &= -\omega_{11/10} \overrightarrow{y_{10}} \wedge (b \overrightarrow{z_{10}} - a \overrightarrow{x_{10}}) \\
 &= -\omega_{11/10} (b \overrightarrow{x_{10}} + a \overrightarrow{z_{10}}) \\
 \overrightarrow{V_{O_1,11/0}} &= \overrightarrow{V_{I,11/0}} + \overrightarrow{\Omega_{11/0}} \wedge \overrightarrow{IO_1} \\
 &= (\omega_{ix} \overrightarrow{x_{10}} + \omega_{iy} \overrightarrow{y_A} + \omega_{iz} \overrightarrow{z_1}) \wedge (R \overrightarrow{z_1} - a \overrightarrow{x_{10}}) \\
 &= -(R \omega_{ix} + a \omega_{iz}) \overrightarrow{y_A} + \omega_{iy} (R \overrightarrow{x_{10}} - a \overrightarrow{z_1})
 \end{aligned}$$

où nous avons exploité les figures géométrales



Avec les projections

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{x_1} &= \cos(\beta) \overrightarrow{x_{10}} - \sin(\beta) \overrightarrow{y_A} \\
 \overrightarrow{y_1} &= \cos(\beta) \overrightarrow{y_A} + \sin(\beta) \overrightarrow{x_{10}} \\
 \overrightarrow{z_{10}} &= \cos(\theta_{10}) \overrightarrow{z_1} - \sin(\theta_{10}) \overrightarrow{y_A}
 \end{aligned}$$

il vient :

$$\boxed{
 \begin{cases}
 / \overrightarrow{x_{10}} : & V_x \cos \beta + V_y \sin \beta = -b \omega_{11/10} + R \omega_{iy} \\
 / \overrightarrow{y_A} : & -V_x \sin \beta + V_y \cos \beta = -R \omega_{ix} + a (\cos(\theta_{10}) \omega_{11/10} - \omega_{iz}) \\
 / \overrightarrow{z_1} : & 0 = -a (\omega_{iy} + \cos(\theta_{10}) \omega_{11/10})
 \end{cases}
 }$$

**Question 8.5.** Dans le système d'équations précédent, il n'apparaît pas de  $\omega_{10}$  car  $O_1 \in (A, \overrightarrow{x_{10}})$ . Pour faire apparaître cette vitesse de rotation, il est possible d'utiliser une composition des taux de rotation ou une composition de vitesses en un point  $M$  tel que

$$\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{x_1} \neq \overrightarrow{0} \iff M \notin (A, \overrightarrow{x_1})$$

par exemple au point  $I$  :

$$\overrightarrow{V_{I,1/0}} = \overrightarrow{V_{I,1/10}} + \overrightarrow{V_{I,10/11}} + \underbrace{\overrightarrow{V_{I,11/0}}}_{\overrightarrow{0}}$$

avec, par relations de changement de point :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{V_{I,1/0}} &= \overrightarrow{V_{O_1,1/0}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{O_1 I} \\
&= V_x \overrightarrow{x_1} + V_y \overrightarrow{y_1} + \omega_z \overrightarrow{z_1} \wedge (a \overrightarrow{x_{10}} - R \overrightarrow{z_1}) \\
&= V_x \overrightarrow{x_1} + V_y \overrightarrow{y_1} + a \omega_z \overrightarrow{y_A} \\
\overrightarrow{V_{I,1/10}} &= \overrightarrow{V_{A,1/10}} + \overrightarrow{\Omega_{1/10}} \wedge \overrightarrow{AI} \\
&= -\omega_{10} \overrightarrow{x_{10}} \wedge -R \overrightarrow{z_1} \\
&= -R \omega_{10} \overrightarrow{y_A} \\
\overrightarrow{V_{I,10/11}} &= \overrightarrow{V_{P,10/11}} + \overrightarrow{\Omega_{10/11}} \wedge \overrightarrow{PI} \\
&= -\omega_{11/10} \overrightarrow{y_{10}} \wedge (b \overrightarrow{z_{10}} - R \overrightarrow{z_1}) \\
&= -\omega_{11/10} (R \cos(\theta_{10}) - b) \overrightarrow{x_{10}}
\end{aligned}$$

Avec les projections déjà calculées, il vient :

$$\begin{cases} / \overrightarrow{x_{10}} : & V_x \cos \beta + V_y \sin \beta = \omega_{11/10} (R \cos(\theta_{10}) - b) \\ / \overrightarrow{y_A} : & -V_x \sin \beta + V_y \cos \beta + a \omega_z = -R \omega_{10} \\ / \overrightarrow{z_1} : & 0 = 0 \end{cases}$$

On obtient alors :

$$\boxed{\omega_{10} = \frac{V_x \sin(\beta) - V_y \cos(\beta) - a \omega_z}{R} \quad \omega_{11/10} = \frac{V_x \cos \beta + V_y \sin \beta}{R \cos(\theta_{10}) - b}}$$

**Question 8.6.** Avec  $\beta_{10} = -\beta_{20} = 60^\circ$  et  $\beta_{30} = 180^\circ$ , il vient :

$$\boxed{\omega_{10} = V_x \frac{\sqrt{3}}{2R} - \frac{V_y}{2R} - \omega_z \frac{a}{R} \quad \omega_{20} = -V_x \frac{\sqrt{3}}{2R} - \frac{V_y}{2R} - \omega_z \frac{a}{R} \quad \omega_{30} = \frac{V_y}{R} - \omega_z \frac{a}{R}}$$

**Question 8.7.** Pour une rotation à la vitesse  $\omega_z$ , sans translation, c'est-à-dire avec  $V_x = V_y = 0$ , il vient :

$$\boxed{\omega_{10} = \omega_{20} = \omega_{30} = -\omega_z \frac{a}{R}}$$

**Question 8.8.** On veut enfin vérifier le respect du critère de vitesse linéaire. Pour un déplacement en ligne droite dans la direction  $\overrightarrow{x_1}$  à une vitesse  $V_x$ , on pose  $\omega_z = 0$  et  $V_y = 0$  tels que :

$$\boxed{\omega_{10} = -\omega_{20} = V_x \frac{\sqrt{3}}{2R} \quad \omega_{30} = 0}$$

— EXERCICE 9 —

## Étude d'un différentiel automobile

**Question 9.1.** Un différentiel est un mécanisme qui, sur un véhicule automobile, permet aux roues motrices de tourner à des fréquences angulaires différentes ce qui est nécessaire en virage où la fréquence angulaire de la roue située à l'intérieur du virage est inférieure à celle de la roue située à l'extérieur du virage. De plus, comme il est impossible d'avoir une égalité parfaite des diamètres des roues compte tenu de l'usure et de la déformation des pneumatiques, alors même en ligne droite les vitesses de rotations doivent pourvoir être différentes.

### 9.1 Nécessité du différentiel en virage

**Question 9.2.** La condition de roulement sans glissement de la roue gauche sur le sol s'écrit

$$\overrightarrow{V_{I_2,2/0}} = \overrightarrow{0}$$

Par composition des vitesses au point  $I_2$ , on a :

$$\overrightarrow{V_{I_2,2/0}} = \overrightarrow{V_{I_2,2/1}} + \overrightarrow{V_{I_2,1/0}} = \overrightarrow{0}$$

Par relation de changement de point, on a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V_{I_2,2/1}} &= \overrightarrow{V_{0_2,2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \wedge \overrightarrow{O_2 I_2} \\ &= \omega_{2/1} \overrightarrow{x_1} \wedge -r \overrightarrow{z} \\ &= r \omega_{2/1} \overrightarrow{y_1} \\ \overrightarrow{V_{I_2,1/0}} &= \overrightarrow{V_{0,1/0}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{O_2 I_2} \\ &= \dot{\theta} \overrightarrow{z} \wedge [(R - \ell/2) \overrightarrow{x_1} - r \overrightarrow{z}] \\ &= (R - \ell/2) \dot{\theta} \overrightarrow{y_1} \end{aligned}$$

Il vient alors dans la direction  $\overrightarrow{y_1}$  :

$$\boxed{\overrightarrow{y_1} : \omega_{2/1} = -\frac{2R - \ell}{2r} \dot{\theta}}$$

De façon similaire, en exploitant la condition de roulement sans glissement de la roue droite sur le sol  $\overrightarrow{V_{I_3,3/0}} = \overrightarrow{0}$  et sachant  $\overrightarrow{M I_3} = -\overrightarrow{M I_2}$  tel que, après avoir appliqué les changements de variables :

$$\forall \square, \square_2 \rightarrow \square_3, \quad \omega_{2/1} \rightarrow \omega_{3/1} \quad \text{et} \quad -\ell \rightarrow +\ell$$

il vient dans la direction  $\overrightarrow{y_1}$  :

$$\boxed{\overrightarrow{y_1} : \omega_{3/1} = -\frac{2R + \ell}{2r} \dot{\theta}}$$

On a par quotient et sachant  $2R > \ell$  :

$$\frac{\omega_{3/1}}{\omega_{2/1}} = \frac{2R + \ell}{2R - \ell} > 1 \iff |\omega_{3/1}| > |\omega_{2/1}|$$

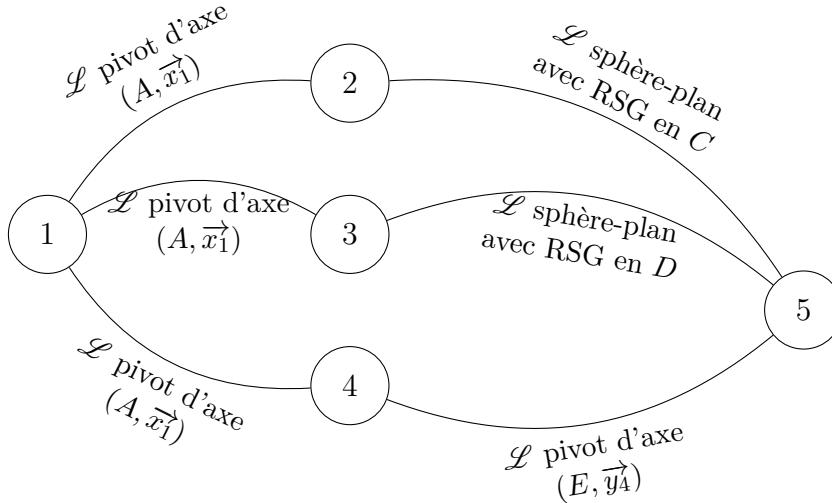
En posant  $\dot{\theta} > 0$ , il vient alors :

$$\omega_{3/1} < \omega_{2/1} < 0$$

ce qui signifie que la vitesse de rotation de la roue droite **3** par rapport à la voiture **1** doit être, en valeur absolue, plus grande que celle de la roue gauche **2** par rapport à **1**.

## 9.2 Étude du mécanisme de répartition de vitesse

Question 9.3.



Les expressions canoniques de torseurs cinématiques sont :

— les trois liaisons pivot d'axe  $(A, \vec{x}_1)$  :

$$\forall \square \in \{2, 3, 4\}, \quad \forall M \in (A, \vec{x}_1), \quad \{\mathcal{V}_{\square/1}\} = \left\{ \begin{array}{c} \omega_{\square 1} \vec{x}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_M$$

— liaison pivot d'axe  $(E, \vec{y}_4)$  :

$$\forall M \in (E, \vec{y}_4), \quad \{\mathcal{V}_{5/4}\} = \left\{ \begin{array}{c} \omega_{54} \vec{y}_4 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_M$$

— liaison sphère-plan avec roulement sans glissement en  $C$  :

$$\{\mathcal{V}_{5/2}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{5/2}} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_C$$

— liaison sphère-plan avec roulement sans glissement en  $D$  :

$$\left\{ \mathcal{V}_{5/3} \right\}_D = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{5/3}} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}$$

**Question 9.4.** Les conditions de roulement sans glissement aux points  $C$  et  $D$  s'écrivent respectivement

$$\overrightarrow{V_{C,5/2}} = \overrightarrow{0} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{V_{D,5/3}} = \overrightarrow{0}$$

Par composition des vitesses aux points  $C$  et  $D$ , il vient

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V_{C,5/2}} &= \overrightarrow{V_{C,5/4}} + \overrightarrow{V_{C,4/1}} - \overrightarrow{V_{C,2/1}} = \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{V_{D,5/3}} &= \overrightarrow{V_{D,5/4}} + \overrightarrow{V_{D,4/1}} - \overrightarrow{V_{D,3/1}} = \overrightarrow{0} \end{aligned}$$

Sachant que

$$\overrightarrow{V_{D,5/4}} = -\overrightarrow{V_{C,5/4}} \quad \text{car} \quad \overrightarrow{ED} = -\overrightarrow{EC}$$

et que

$$\forall \square \in \{2, 3, 4\}, \quad \overrightarrow{V_{D,\square/1}} = \overrightarrow{V_{C,\square/1}} \quad \text{car} \quad \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{x_1} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) \wedge \overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{x_1}$$

alors il n'est nécessaire que de calculer 2 vitesses. Par changement de point, il vient :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V_{C,5/4}} &= \overrightarrow{V_{E,5/4}} + \overrightarrow{\Omega_{5/4}} \wedge \overrightarrow{EC} \\ &= \omega_{54} \overrightarrow{y_4} \wedge -r \overrightarrow{x_1} \\ &= r \omega_{54} \overrightarrow{z_4} \\ \overrightarrow{V_{C,\square/1}} &= \overrightarrow{V_{A,\square/1}} + \overrightarrow{\Omega_{\square/1}} \wedge \overrightarrow{AC} \\ &= \omega_{\square 1} \overrightarrow{x_1} \wedge (a \overrightarrow{x_1} + R \overrightarrow{y_4}) \\ &= R \omega_{\square 1} \overrightarrow{z_4} \end{aligned}$$

Il vient alors dans la direction  $\overrightarrow{z_4}$  :

$$\begin{cases} 0 = r \omega_{54} + R (\omega_{41} - \omega_{21}) \\ 0 = -r \omega_{54} + R (\omega_{41} - \omega_{31}) \end{cases} \iff \boxed{\begin{cases} \omega_{41} = \frac{\omega_{21} + \omega_{31}}{2} \\ \omega_{54} = \frac{R}{2r} (\omega_{31} - \omega_{21}) \end{cases}}$$

qui signifie que  $\omega_{41}$  est la moyenne de  $\omega_{21}$  et  $\omega_{31}$  et que  $\omega_{54}$  n'est pas nulle que si  $\omega_{31} \neq \omega_{21}$ , c'est-à-dire qu'il est une image de la différence de vitesse de rotation de roues.

**Question 9.5.** En utilisant le porte satellite 4 comme référentiel, alors on a un train d'engrenages simple tel que

$$\frac{|\omega_{34}|}{|\omega_{54}|} = \frac{|\omega_{24}|}{|\omega_{54}|} = \frac{r}{R}$$

Pour signer ces expressions, il est nécessaire de trouver ceux des vitesses aux points  $C$  et  $D$ . Soit

$$\omega_{34} > 0 \implies \omega_{54} < 0 \implies \omega_{24} < 0$$

d'où

$$\omega_{34} = -\frac{r}{R}\omega_{54} = -\omega_{24} \iff \boxed{\omega_{34} = -\omega_{24}}$$

De plus, comme les liaisons pivot  $\mathcal{L}_{2/1}$ ,  $\mathcal{L}_{3/1}$  et  $\mathcal{L}_{3/1}$  sont coaxiales (taux de rotation colinéaires), il est possible de composer les taux de rotation dans la direction  $\vec{x}_1$  tels que

$$\begin{cases} \omega_{24} = \omega_{21} - \omega_{41} \\ \omega_{34} = \omega_{31} - \omega_{41} \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \omega_{31} - \omega_{41} = \omega_{41} - \omega_{21} \iff \boxed{\omega_{41} = \frac{\omega_{21} + \omega_{31}}{2}}$$

ce qui correspond bien à l'expression reliant  $\omega_{21}$ ,  $\omega_{31}$  et  $\omega_{41}$  trouvée à la question précédente.

**Question 9.6.** Sachant de la question 9.2 que

$$\omega_{2/1} = -\frac{2R - \ell}{2r}\dot{\theta} \quad \text{et} \quad \omega_{3/1} = -\frac{2R + \ell}{2r}\dot{\theta}$$

il vient

$$\begin{cases} \omega_{41} = -R\dot{\theta} \\ \omega_{54} = \frac{R\ell}{2r^2}\dot{\theta} \neq 0 \end{cases}$$

Il est donc bien possible de moduler la vitesse de rotation des roues en fonction de celle de l'arbre moteur  $\omega_{41}$  pour prendre un virage.

**Question 9.7.** Une roue patine si sa vitesse de rotation est grande par rapport à une autre. En supposant que la roue droite patine, alors on a :

$$\omega_{31} = \lim_{k \rightarrow +\infty} k\omega_{21} \implies \omega_{21} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{2\omega_{41}}{1 + k} = 0$$

ce qui signifie que la roue gauche ne tourne plus et donc que la voiture ne peut plus avancer, quelle que soit la vitesse de rotation du moteur.

**Question 9.8.** Avec un différentiel, lorsqu'une roue patine, il n'est plus possible de transmettre de puissance motrice au sol.

Pour éviter ce problème, il faudrait bloquer le différentiel en bloquant la liaison pivot  $\mathcal{L}_{5/4}$ ; c'est ce qui équipe les véhicules  $4 \times 4$  (voire le blocage de pont pour transmettre la puissance de façon inconditionnelle à l'avant et à l'arrière).

— EXERCICE 10 —

## Système d'aide à la navigation

### 10.1 Modélisation du comportement de la pompe

**Question 10.1.** La liaison  $\mathcal{L}_{1/0}$  est une liaison pivot d'axe  $(O, \vec{x}_0)$  telle que :

$$\forall M \in (O, \vec{x}_0), \quad \{\mathcal{V}_{1/0}\} = \underset{M}{\left\{ \begin{array}{l} \omega_{1/0} \vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}}$$

**Question 10.2.** La liaison  $\mathcal{L}_{2/1}$  est une liaison pivot glissant d'axe  $(A, \vec{x}_0')$  dont la vitesse le long de l'axe est définie par

$$\overrightarrow{V_{C,2/1}} = \overrightarrow{V_{C/1}} = \left. \frac{d\overrightarrow{AC}}{dt} \right|_1 = \dot{\lambda} \vec{x}_1$$

telle que

$$\forall M \in (A, \vec{x}_0), \quad \{\mathcal{V}_{2/1}\} = \underset{M}{\left\{ \begin{array}{l} \omega_{2/1} \vec{x}_0 \\ \dot{\lambda} \vec{x}_0 \end{array} \right\}}$$

**Question 10.3.** La liaison  $\mathcal{L}_{2/0}$  est une liaison sphère-plan de normale  $(C, \vec{n}) = (I, \vec{n})$  telle que

$$\overrightarrow{V_{I,2/0}} \cdot \vec{n} = 0$$

d'où

$$\{\mathcal{V}_{2/0}\} = \underset{C}{\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega_{2/0}} \\ \overrightarrow{V_{I,2/0}} \end{array} \right\}} \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{V_{I,2/0}} \cdot \vec{n} = 0$$

**Question 10.4.** Par théorème d'équiprojectivité du champ de vitesses  $\{\mathcal{V}_{2/0}\}$  le long de  $\overrightarrow{CI}$ , colinéaire à  $\vec{n}$ , il vient :

$$\overrightarrow{V_{I,2/0}} \cdot \vec{n} = \overrightarrow{V_{C,2/0}} \cdot \vec{n} = 0$$

**Question 10.5.** Par composition des vitesses au point  $C$ , dans la direction  $\vec{n}$ , il vient :

$$\underbrace{\overrightarrow{V_{C,2/0}} \cdot \vec{n}}_0 = \overrightarrow{V_{C,2/1}} \cdot \vec{n} + \overrightarrow{V_{C,1/0}} \cdot \vec{n}$$

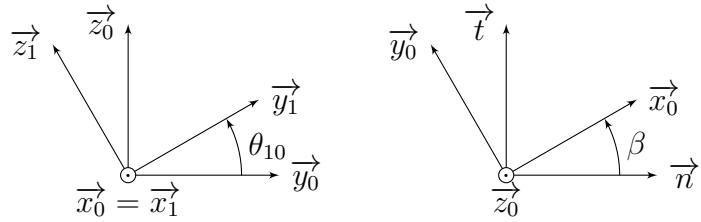
Sachant  $C \in (A, \vec{x}_0)$ , on a :

$$\overrightarrow{V_{C,2/1}} = \overrightarrow{V_{A,2/1}} = \dot{\lambda} \vec{x}_0$$

et par relation de changement de point, on a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V_{C,1/0}} &= \overrightarrow{V_{O,1/0}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{OC} \\ &= \omega_{1/0} \vec{x}_0 \wedge (\lambda \vec{x}_0 + r \vec{y}_1) \\ &= r \omega_{1/0} \vec{z}_1 \end{aligned}$$

Avec les figures géométrales



on trouve

$$\begin{aligned}\vec{x}_0 \cdot \vec{n} &= \cos(\beta) \\ \vec{z}_1 \cdot \vec{n} &= (\cos(\theta_{10})\vec{z}_0 - \sin(\theta_{10})\vec{y}_0) \cdot \vec{n} = \sin(\beta) \sin(\theta_{10})\end{aligned}$$

Par somme, il vient finalement :

$$\boxed{\dot{\lambda} = -r \tan(\beta) \sin(\theta_{10}) \omega_{1/0}}$$

qui correspond bien à la relation obtenue par dérivation de la loi entrée-sortie géométrique.

## 10.2 Calcul du débit instantané de la pompe

**Question 10.6.** Avec 6 pistons, on a :

$$\forall i \in \llbracket 0, 5 \rrbracket, \dot{\lambda}_i = -r \tan(\beta) \sin\left(\theta_{10} + \frac{i\pi}{3}\right) \omega_{1/0}$$

et sachant que le débit instantané pour un piston s'écrit

$$\forall i \in \llbracket 0, 5 \rrbracket, Q_i = \frac{S}{2} (\dot{\lambda}_i + |\dot{\lambda}_i|) \quad \text{avec} \quad S = \frac{\pi d^2}{4}$$

D'où par somme, le débit instantané de la pompe :

$$\boxed{Q = -\frac{r\pi d^2}{8} \tan(\beta) \omega_{1/0} \sum_{i=0}^5 \left[ \sin\left(\theta_{10} + \frac{i\pi}{3}\right) + \left| \sin\left(\theta_{10} + \frac{i\pi}{3}\right) \right| \right]}$$

**Question 10.7.** Sachant que sur une période on a :

$$\int_0^{2\pi} (\sin(x) + |\sin(x)|) \, dx = \int_0^\pi \sin(x) \, dx = [-\cos(x)]_0^\pi = 2$$

alors il vient le débit moyen par piston

$$\bar{Q}_i = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q_i(\theta_{10}) \, d\theta_{10} = \frac{d^2}{4} r \tan(\beta) \omega_{1/0}$$

d'où, par somme :

$$\boxed{\bar{Q} = \frac{3d^2}{2} r \tan(\beta) \omega_{1/0}}$$

— EXERCICE 11 —

**Table élévatrice**

**Question 11.1.** Par théorème de Thalès dans les triangles  $AOD$  et  $BOC$ , isocèles en  $O$ , on a  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}$ . Le contact du galet **5** avec le sol **1** étant maintenu, on a  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} = \mu \overrightarrow{x}$ ,  $\mu$  variable. Considérant que le contact est aussi maintenu entre le galet **6** et le plateau **2** alors on a que le plateau ne change pas d'orientation ; d'où on en déduit que

$$\overrightarrow{\Omega_{2/1}} = \overrightarrow{0}$$

Donc  $\{\mathcal{V}_{2/1}\}$  est une translation.

Sachant le triangle  $AOC$  isocèle en  $O$ , on en déduit que le parallélogramme  $ADBC$  est un rectangle car ses diagonales sont de même longueur ; d'où  $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}) \equiv \pi/2$  [2π] et donc que  $\overrightarrow{AC} = 2a \sin(\alpha) \overrightarrow{y}$  est colinéaire à  $\overrightarrow{y}$ . Ainsi, sachant que par définition

$$\overrightarrow{V_{C,2/1}} = \overrightarrow{V_{C/1}} = \left. \frac{d\overrightarrow{AC}}{dt} \right|_1 = 2a \cos(\alpha) \dot{\alpha} \overrightarrow{y}$$

qui, sachant  $\overrightarrow{\Omega_{2/1}} = \overrightarrow{0}$ , conduit à

$$\forall M, \{\mathcal{V}_{2/1}\} = \left. \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ 2a \cos(\alpha) \dot{\alpha} \overrightarrow{y} \end{array} \right\}_M$$

qui correspond bien à un champ de translation de direction  $\overrightarrow{y}$ .

**Question 11.2.** Par composition des taux de rotation, on a :

$$\overrightarrow{\Omega_{6/2}} = \overrightarrow{\Omega_{6/3}} + \overrightarrow{\Omega_{3/1}} - \underbrace{\overrightarrow{\Omega_{2/1}}}_{\overrightarrow{0}}$$

Avec  $\overrightarrow{\Omega_{6/3}} = \omega_{63} \overrightarrow{z}$  et  $\overrightarrow{\Omega_{3/1}} = \dot{\alpha} \overrightarrow{z}$ , il vient

$$\boxed{\overrightarrow{\Omega_{6/2}} = (\omega_{63} + \dot{\alpha}) \overrightarrow{z}}$$

**Question 11.3.** Par composition des vitesses au point  $B$ , on a :

$$\overrightarrow{V_{B,2/1}} = \overrightarrow{V_{B,2/6}} + \overrightarrow{V_{B,6/3}} + \overrightarrow{V_{B,3/1}}$$

En posant  $\overrightarrow{V_{B,2/1}} = v \overrightarrow{y}$  et sachant  $\overrightarrow{V_{B,6/3}} = \overrightarrow{0}$  et par relations de changement de point :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V_{B,2/6}} &= \overrightarrow{V_{I,2/6}} + \overrightarrow{\Omega_{2/6}} \wedge \overrightarrow{IB} \\ &= -(\omega_{63} + \dot{\alpha}) \overrightarrow{z} \wedge -R \overrightarrow{y} \\ &= -R(\omega_{63} + \dot{\alpha}) \overrightarrow{x} \\ \overrightarrow{V_{B,3/1}} &= \overrightarrow{V_{A,3/1}} + \overrightarrow{\Omega_{3/1}} \wedge \overrightarrow{AB} \\ &= \dot{\alpha} \overrightarrow{z} \wedge 2a \overrightarrow{x} \\ &= 2a \dot{\alpha} \overrightarrow{y}_3 \end{aligned}$$

il vient :

$$\begin{cases} / \vec{x} : & 0 = -R(\omega_{63} + \dot{\alpha}) - 2a \cos(\alpha) \dot{\alpha} \\ / \vec{y} : & \boxed{v = 2a \cos(\alpha) \dot{\alpha}} \end{cases}$$

**Question 11.4.** De la relation

$$\overrightarrow{V_{B,2/1}} \cdot \vec{x} = 0 \iff R(\omega_{63} + \dot{\alpha}) = -2a \cos(\alpha) \dot{\alpha} \iff \boxed{\omega_{63} = -\left(1 + \frac{2a \cos(\alpha)}{R}\right) \dot{\alpha}}$$

On en déduit par anti-symétrie

$$\boxed{\omega_{54} = -\omega_{63}}$$

**Question 11.5.** Par composition des taux de rotation, il vient :

$$\overrightarrow{\Omega_{4/3}} = \overrightarrow{\Omega_{4/1}} - \overrightarrow{\Omega_{3/1}}$$

Sachant que dans le plan de normale  $\vec{z}$ , on a :

$$(\vec{x}, \vec{x}_4) \equiv \pi - (\vec{x}, \vec{x}_3) \quad [2\pi] \equiv \pi - \alpha \quad [2\pi] \implies \overrightarrow{\Omega_{4/1}} = -\dot{\alpha} \vec{z}$$

il vient alors par somme :

$$\boxed{\overrightarrow{\Omega_{4/3}} = -2\dot{\alpha} \vec{z}}$$

**Question 11.6.** Sachant  $\overrightarrow{V_{F,3/7}} \perp \vec{x}_7$ , on a par composition des vitesses au point  $F$  dans la direction  $\vec{x}_7$  :

$$\overrightarrow{V_{F,4/3}} \cdot \vec{x}_7 = \underbrace{\overrightarrow{V_{F,4/8}} \cdot \vec{x}_7}_{0} + \overrightarrow{V_{F,8/7}} \cdot \vec{x}_7 + \underbrace{\overrightarrow{V_{F,7/3}} \cdot \vec{x}_7}_{0}$$

avec  $\overrightarrow{V_{F,8/7}} = \dot{\lambda} \vec{x}_7$  et, par changement de point

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V_{F,4/3}} &= \overrightarrow{V_{O,4/3}} + \overrightarrow{\Omega_{4/3}} \wedge \overrightarrow{OF} \\ &= -2\dot{\alpha} \vec{z} \wedge b \vec{x}_4 \\ &= -2b\dot{\alpha} \vec{y}_4 \end{aligned}$$

et sachant  $(\vec{x}_4, \vec{x}_7) \equiv \beta + \alpha - \pi \quad [2\pi]$  tel que

$$\vec{y}_4 \cdot \vec{x}_7 = \sin(\beta + \alpha - \pi) = -\sin(\beta + \alpha)$$

il vient finalement :

$$\boxed{\dot{\lambda} = 2b \sin(\beta + \alpha) \dot{\alpha}}$$

**Question 11.7.** En exploitant le résultat précédent et celui de la question 11.3, il vient :

$$\boxed{v = \frac{a \cos(\alpha)}{b \sin(\beta + \alpha)} \dot{\lambda}}$$

**Question 11.8.** Pour assurer une vitesse de translation supérieure à  $v_{\min} = 50 \text{ mm}\cdot\text{s}^{-1}$ , il faut :

$$v = \frac{a \cos(\alpha)}{b \sin(\beta + \alpha)} \dot{\lambda} \geq v_{\min} \iff \dot{\lambda} \geq \frac{b \sin(\beta + \alpha)}{a \cos(\alpha)} v_{\min}$$

Sachant que le débit est défini par

$$Q = \frac{\pi d^2}{4} \dot{\lambda}$$

on en déduit

$$Q \geq \frac{\pi d^2}{4} \frac{b \sin(\beta + \alpha)}{a \cos(\alpha)} v_{\min}$$

Avec  $d = 50 \text{ mm}$ ,  $a = 0,6 \text{ m}$ ,  $b = 1,2 \text{ m}$  et dans la configuration critique, c'est-à-dire telle que

$$\frac{\sin(\beta + \alpha)}{\cos(\alpha)} = \sin(\beta) + \cos(\beta) \tan(\alpha)$$

soit maximale. Au voisinage de  $\alpha \equiv \pi/2 [2\pi]$  on a  $\beta \approx \alpha$ , tel que

$$\frac{\sin(\beta + \alpha)}{\cos(\alpha)} \approx 2 \sin(\alpha) \leq 2$$

il vient :

$$Q \geq \frac{\pi b d^2}{2a} v_{\min} = \frac{\pi 1,2 \times (50 \times 10^{-3})^2 \times 50 \times 10^{-3}}{2 \times 0,6} \approx 392 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$$