Fiche 33 : TD du 11-12.

Exercice 1

Montrer, en revenant aux définitions des limites d'une suite les résultats suivants :

1. La limite d'une somme de suites convergentes est une suite convergeant vers la somme des limites.
2. La limite d'une somme d'une suite convergente et d'une suite tendant vers $+\infty$ est une suite tendant vers $+\infty$.
3. La limite du produit d'une suite convergente vers $l > 0$ et d'une suite tendant vers $+\infty$ est une suite tendant vers $+\infty$.

Exercice 2

Déterminer $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que

1. $u_0 = 1$, $u_1 = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.
2. $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+2} = -2u_{n+1} - 4u_n$.

Exercice 3

On considère la suite définie par $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

Montrer que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Exercice 4

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associées à la relation de récurrence $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 8}{6}$$

avec une donnée initiale $u_0 \geq 0$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \geq 0$.
2. Étudier sur $\mathbb{R}_+$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2+8}{6}$ et le signe de l'expression $f(x) - x$.
3. Étudier en fonction de u_0, le comportement de la suite (u_n).

Exercice 5

1. Montrer qu'il existe 2 réels $\alpha < 0 < \beta$ qu'on ne cherchera pas à calculer vérifiant :

$$\begin{cases} \exp(\alpha) = \alpha + 2 \\ \exp(\beta) = \beta + 2 \end{cases}$$

2. Discuter suivant les valeurs de u_0 la nature de la suite définie par la donnée de u_0 réel et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = e^{u_n} - 2$$

Exercice 6

1. Si $n \geq 1$, montrer que l'équation (E_n) :

$$\sum_{k=1}^{n} x^k = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = 1$$

admet une unique solution, notée a_n, dans $[0, 1]$.

2. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, minorée par $\frac{1}{2}$.
3. Montrer que (a_n) converge vers $\frac{1}{2}$.