Fiche 34 : Groupes, anneaux, corps.

Exercice 1

Dans les questions suivantes, déterminer si la partie H est un sous-groupe du groupe G.

1. $G = (\mathbb{Z}, +)$; $H = \{\text{nombres pairs}\}$.
2. $G = (\mathbb{Z}, +)$; $H = \{\text{nombres impairs}\}$.
3. $G = (\mathbb{R}, +)$; $H = [-1, +\infty[$.
4. $G = (\mathbb{R}^*, \times)$; $H = \mathbb{Q}^*$.
5. $G = (\{\text{bijections de } E \text{ dans } E\}, \circ)$; $H = \{f \in G;\ f(x) = x\}$ où E est un ensemble et $x \in E$.
6. $G = (\{\text{bijections de } E \text{ dans } E\}, \circ)$; $H = \{f \in G;\ f(x) = y\}$ où E est un ensemble et $x, y \in E$ avec $x \neq y$.

Exercice 2

Démontrer pour chaque question que H est un sous-groupe de G.

1. $G = (\mathbb{C}^*, \times)$ et $H = \{z \in \mathbb{C}^* :\ \exists n \in \mathbb{N}^*,\ z^n = 1\}$.
2. $G = (\mathbb{R}^*, \times)$ et $H = \{a + b\sqrt{2} :\ a, b \in \mathbb{Q},\ (a, b) \neq (0, 0)\}$.

Exercice 3

On appelle ensemble des entiers de Gauss noté $\mathbb{Z}[i]$ l'ensemble des nombres complexes qui s'écrivent $a + ib$, avec a et $b \in \mathbb{Z}$.

1. Démontrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau.
2. Pour tout nombre complexe z, on note $N(z) = z\overline{z}$.
   (a) Démontrer que, pour tous nombres complexes z et z', $N(z)N(z') = N(zz')$.
   (b) Démontrer que, pour tout entier de Gauss z, $N(z)$ est un entier naturel.
   (c) Soit z un entier de Gauss inversible. Déduire des questions précédentes que $N(z) = 1$.
   (d) Quels sont les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$?

Exercice 4

Soit $A = \left\{\dfrac{m}{n};\ m \in \mathbb{Z},\ n \in 2\mathbb{N} + 1\right\}$ (c'est-à-dire que A est l'ensemble des rationnels à dénominateur impair). Démontrer que $(A, +, \times)$ est un anneau. Quels sont ses éléments inversibles ?

Exercice 5

Montrer que les ensembles suivants sont des sous corps de $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \left\{a + b\sqrt{2}/(a, b) \in \mathbb{Q}^2\right\}$$

$$\mathbb{Q}[i] = \left\{a + ib/(a, b) \in \mathbb{Q}^2\right\}$$