Structures

Plan

1 Lois de composition

On considère A un ensemble non vide.
Une **loi de composition** ou **opération** ici notée $*$ est une application :

$$\begin{cases} A \times A \to A \\ (a, b) \mapsto a * b \end{cases}$$

qui a tout couple (a, b) d'éléments de A associe un élément $a * b$ de A. Un produit $\times$ ou une somme $+$ sont des exemples naturels d'opérations.

L'opération $*$ est dite **associative** quand pour tout triplet (a, b, c) d'éléments de A, on a :

$$a * (b * c) = (a * b) * c$$

Dans la suite de ce chapitre, toutes les opérations considérées seront supposées associatives (même si cela n'est pas précisé).

L'opération $*$ est dite **commutative** quand pour tout couple (a, b) d'éléments de A, on a :

$$a * b = b * a$$

L'élément e de A est dit **neutre** pour l'opération $*$ si, pour tout élément a de A :

$$a * e = e * a = a$$

Un élément neutre est forcement unique. Dans la suite, on dira donc : **l'**élément neutre.

Considérons l'élément neutre e pour l'opération $*$. L'élément a de A est dit **inversible** (pour l'opération $*$) quand il existe un élément de A qui est alors unique et noté a^{-1} tel que :

$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$$

Attention, on peut avoir $a * b = e$ et $b * a \neq e$.

Propriété 1 *Si a et b sont inversibles pour l'opération $*$ (associative) alors :*

$$(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$$

Même si cela n'est pas précisé, les opérations communément appelées additions et notées $+$ sont associatives et commutatives. Dans le cas d'une opération appelée addition, l'élément neutre est noté 0 et l'"inverse" s'appelle "opposé".

Considérons un ensemble muni de 2 opérations $*$ et $+$, cette dernière commutative. On dit que l'opération $*$ est **distributive** sur l'opération $+$ quand, pour tout a, b, c dans E :

$$a * (b + c) = a * b + a * c \quad \text{et } (b + c) * a = b * a + c * a$$

Considérons une opération $*$.

La partie $B \subset A$ est dite *stable* (pour l'opération $*$) quand, pour tous éléments a et a' de B : $a * a' \in B$.

2 Groupes

Un **groupe additif** G ou $(G, +)$ est un ensemble muni d'une opération $+$ (somme) associative, commutative, et qui admet un élément neutre (noté 0 ou 0_G) tel que tout élément a de G admet un opposé dans G noté $-a$ qui vérifie $a + (-a) = 0$. Dans ce cas, on dira que **tout élément de G est opposable** dans G.

Dans un groupe additif, si n est un entier naturel, on peut considérer l'élément $na = a + a + \cdots + a$ (n facteurs) et l'élément $-na = -(na) = n(-a)$.

Si g est un groupe additif, une partie G' de G est un **sous groupe** de G quand :

- 0 est dans G',
- si a et b sont dans G', $a + b$ est dans G', on dit que G' **est stable par addition**,

- si a est dans G', $-a$ est dans G', on dit que G' **est stable par opposition**.

Il est bien connu que les ensembles $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ sont des groupes additifs.
Si n est un entier non nul, les ensembles $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont des groupes additifs. Il y en a bien d'autres.

Un **groupe multiplicatif** G ou $(G, *)$ est un ensemble muni d'une opération $*$ (produit) associative, non nécessairement commutative, qui admet un élément neutre souvent noté 1 ou 1_G (parfois e) tel que **tout élément** a **de** G **est inversible** dans G : il existe un élément noté a^{-1} (éventuellement $\frac{1}{a}$ dans le cas commutatif) vérifiant $a*a^{-1} = a^{-1}*a = 1_G$.

Souvent le produit est omis et $a * b$ est noté ab.
Dans un groupe multiplicatif, si n est un entier relatif, on peut considérer l'élément a^n.

Propriété 2 *Si a et b sont éléments d'un groupe multiplicatif $(G, *)$ alors :*

$$(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$$

Si $(G, *)$ est un groupe multiplicatif, une partie G' de G est un **sous groupe** de G quand :

- 1 est dans G',
- si a et b sont dans G', $a * b$ est dans G' : on dit que G' **est stable par produit**,
- si a est dans G', a^{-1} est dans G', on dit que G' **est stable par inversion**.

Il est bien connu que $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{Q}^*_+$, $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{R}^*_+$, $\mathbb{C}^*$, $\mathbb{U}$ (ensemble des complexes unitaires), $\mathbb{U}_n$ (ensemble des racines n-ièmes de l'unité, $n \in \mathbb{N}^*$) sont des groupes multiplicatifs commutatifs.

Si E est un ensemble, l'ensemble S_E des bijections (ou **permutations**)de E est un groupe pour l'opération $\circ$, d'élément neutre Id_E, en général non commutatif. L'inverse de $f \in S_E$ est alors la réciproque de f.

Si G et G' sont 2 groupes (multiplicatifs ou additifs) alors

$$G \times G' = \{(a, b)/a \in G, b \in G'\}$$

est un groupe dit **groupe produit**, l'opération étant définie terme par terme, l'élément neutre étant le couple formé par les éléments neutres de G et G'.

On peut définir de même un produit de plus de 2 groupes, les opérations étant là aussi définies termes par termes. Les ensembles $\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ sont des exemples de tels groupes additifs.

Si $(G,*)$ et $(G',.)$ sont 2 groupes (multiplicatifs ou additifs) alors $\phi : G \to G'$ est un **morphisme** quand pour tout x et y dans G :

$$\phi(x * y) = \phi(x).\phi(y)$$

Observons alors que (cas de groupes multiplicatifs) :

- Si 1_G est l'élément neutre de G alors $\phi(1_G) = 1_{G'}$ est l'élément neutre de G'.
- Si H est un sous groupe de G alors $\phi(H)$ est un sous groupe de G'.
- Si H' est un sous groupe de G' alors $\phi^{-1}(H')$ est un sous groupe de G'.
- $\phi(G)$ est un sous groupe de G' appelé **image** de f.
- $\phi^{-1}(1_{G'})$ est un sous groupe de G appelé **noyau** de ϕ.

Propriété 3 *$f : G \to G'$ morphisme de groupes multiplicatifs est injectif si et seulement si $\phi^{-1}(1_{G'}) = 1_G$.*

$\phi : G \to G'$ morphisme de groupes multiplicatifs est bijectif si et seulement si $\phi(G) = G'$ et $\phi^{-1}(1_{G'}) = \{1_G\}$. Dans ce cas, on dit que ϕ est un **isomorphisme** (sa réciproque est aussi un morphisme) et on dit que G et G' sont des groupes **isomorphes**.

Cas des groupes additifs :

- $\phi(0_G) = 0_{G'}$.
- Si H est un sous groupe de G alors $\phi(H)$ est un sous groupe de G'.
- Si H' est un sous groupe de G' alors $\phi^{-1}(H')$ est un sous groupe de G'.
- $\operatorname{Im}\phi = \phi(G)$ est un sous groupe de G' appelé **image** de f.
- $\phi^{-1}(0_{G'}) = \ker\phi$ est un sous groupe de G appelé **noyau** de ϕ.

Propriété 4 *$f : G \to G'$ morphisme de groupes additifs est injectif si et seulement si $\phi^{-1}(0_{G'}) = 0_G$.*

$\phi : G \to G'$ morphisme de groupes additifs est bijectif si et seulement si $\operatorname{Im}\phi = G'$ et $\ker\phi = 0_G$. Dans ce cas, on dit que ϕ est un **isomorphisme** (sa réciproque est aussi un morphisme) et on dit que G et G' sont des groupes **isomorphes**.

3 Anneaux et corps

Un **anneau** A ou $(A,+,*)$ est un ensemble muni de 2 opérations : $+$ (somme) faisant de $(A,+)$ un groupe additif (donc commutatif) d'élément neutre 0 et $*$ (souvent omis) un produit associatif, d'élément neutre $1 \neq 0$ (noté 1_A si besoin), tel que $*$ est distributive sur $+$. L'anneau A est dit **commutatif** si son produit l'est.

Dans un anneau A, pour $a \in A$: $a * 0 = 0 * a = 0$ (on dit que 0 est **absorbant** pour le produit).

L'anneau A est dit **intègre** quand si $ab = 0$ dans A alors $a = 0$ ou $b = 0$
Il est bien connu que $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ sont des anneaux commutatifs intègres.

Si $n \geq 2$ est un entier, les ensembles $\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ munis de leurs additions et produits "naturel" sont des anneaux non intègres.

Si E est un ensemble non vide, les ensembles $\mathbb{R}^E$, $\mathbb{C}^E$ (des applications définies sur E à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ respectivement), munis de leurs additions et produits "naturel", sont des anneaux commutatifs non intègres.

Dans un anneau A, si $a \in A$ et n est un entier relatif, on peut définir na.

Dans un anneau A, si $a \in A$ et n est un entier naturel, on peut définir a^n par convention $a^0 = 1$, en interdisant 0^0, et on retrouve les célèbres formules du binôme et de la série géométrique :

Théorème 1 *Si a et b sont 2 éléments qui commutent entre eux ($a*b = b*a$) d'un anneau A et si n est un entier naturel non nul alors :*

$$(a+b)^n = a^n + n \cdot a^{n-1}b + \binom{n}{2} \cdot a^{n-2}b^2 + \cdots + n \cdot ab^{n-1} + b^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$a^n - b^n = (a-b) \cdot (a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}$$

$$a^n - 1 = (a-1) \cdot (a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1)$$

Si A est un anneau, une partie A' de A est un **sous anneau** de A quand :

- 0 et 1 sont dans A',
- si a et b sont dans A' alors $a+b$ et ab sont dans A'.

On dit que A' **est stable par somme, opposition et produit**.

Si A et A' sont 2 anneaux alors $f : A \to A'$ est un **morphisme** (d'anneaux) quand $f(1_A) = 1_{A'}$ et pour tout x et y dans A :

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{et} \quad f(xy) = f(x)f(y)$$

Attention, les opérations ne sont pas faites dans les mêmes ensembles Un **isomorphisme** est un morphisme bijectif, sa réciproque est aussi un morphisme.

Un exemple de groupe :

Propriété 5 *Si A est un anneau (commutatif ou pas), l'ensemble des éléments inversibles dans A (pour le produit) forme un groupe multiplicatif d'élément neutre 1 appelé **groupe des inversibles de** A.*

En particulier si a et b sont inversibles alors $a * b$ l'est aussi et :

$$(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$$

Un **corps** K ou $(K, +, *)$ est un anneau commutatif tel que tout élément non nul est inversible dans K, c'est à dire que $K^* = K - \{0\}$ est un groupe multiplicatif commutatif.

$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ sont des corps. Il y a bien d'autres.

Si K est un corps, une partie K' de K est un **sous corps** de K quand :

- 0 et 1 sont dans K',
- si a et b sont dans K' alors $a + b$ et ab et $-a$ sont dans K'.
- si a est dans $K' - \{0\}$ alors a^{-1} est dans K'.

On dit que K' **est stable par somme, produit, opposition et inversion**.

4 Espaces vectoriels classiques

Un **espace vectoriel** E sur un corps $\mathbb{K}$ (très souvent $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) ou $\mathbb{K}$**-espace vectoriel** est un ensemble E muni : d'une addition $+$ pour lequel E est un groupe d'élément neutre $0 = 0_E$ et d'un produit (noté parfois . mais souvent omis) des éléments de E par ceux de $\mathbb{K}$ à valeurs dans E, associatif, distributif sur $+$.

On demande de plus que si v est un vecteur de E alors $1_{\mathbb{K}}.v = 1.v = v$.

Les éléments de E, les **vecteurs**, d'un espace sont souvent notés avec des lettres romaines et les éléments de $\mathbb{K}$, les **scalaires**, sont notés avec des lettres grecques.

Les ensembles :

- $\{0\}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, ..., $\mathbb{R}^n$ pour $n \in \mathbb{N}$;
- L'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles ;
- Si X est un ensemble non vide, l'ensemble $\mathbb{R}^X$ des applications réelles définies sur X ;

sont naturellement des espaces vectoriels réels.

Les ensembles :

- $\{0\}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^2$, $\mathbb{C}^3$, ..., $\mathbb{C}^n$ pour $n \in \mathbb{N}$;
- L'ensemble $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ des suites complexes ;
- Si X est un ensemble non vide, l'ensemble $\mathbb{C}^X$ des applications complexes définies sur X ;

sont naturellement des espaces vectoriels complexes et du coup réels.