Chap 10 : Calcul matriciel

Plan

1 Matrices

1.1 Espaces de matrices.

Ici on fixe un corps $\mathbb{K}$ qui sera très souvent $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $n \geq 1$, $p \geq 1$ des entiers.

On pose :

$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des tableaux (**matrices**) à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$:

$$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = \left\{ M = [\lambda_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} / \ \forall_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \ \lambda_{ij} \in \mathbb{K} \right\}$$

$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des tableaux à n lignes et 1 colonne dites **matrices colonnes de taille** n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ s'identifie à $\mathbb{K}^n$ quand les vecteurs sont écrits en colonnes.

$\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des tableaux à 1 ligne et n colonnes dites **matrices lignes de taille** n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

$\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ s'identifie à $\mathbb{K}^n$ quand les vecteurs sont écrits en lignes.

Pour la multiplication par les constantes et l'addition termes à termes, ces ensembles sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

1.2 Transposition

Définition 1 *Soit $M = (m_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$ une matrice de l'espace $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On pose*

$$M^T = (m_{ji})_{1\leq j\leq p, 1\leq i\leq n} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$$

*M^T est **la transposée** de la matrice M.*

L'application transposition :

$$T \begin{cases} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ M \to M^T \end{cases}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels (une bijection linéaire), en particulier, si λ est un scalaire et si M et N sont dans l'espace $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:

$$(M^T)^T = M \quad , \quad (\lambda.M)^T = \lambda M^T \quad , \quad (M+N)^T = M^T + N^T$$

1.3 Matrices élémentaires

Pour i dans $[\![1,n]\!]$ et j dans $[\![1,p]\!]$, on pose $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui en i-ème ligne et j-ième colonne qui est un 1. Ainsi :

$$E_{i,j} = [\delta_{i,k}\delta_{j,l}]_{1\leq k\leq n; 1\leq l\leq p}$$

Si $A = [\lambda_{i,j}]_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ alors :

$$A = \sum_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p} \lambda_{i,j} E_{i,j}$$

Autrement dit, toute matrice est une combinaison linéaire de matrices élémentaires.

1.4 Matrices carrées

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des tableaux à n lignes et n colonnes dites **matrices carrées de taille** n à coefficients dans $\mathbb{K}$:

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \{M = [\lambda_{ij}]_{1\leq i,j\leq n} / \ \forall\ 1\leq i,j\leq n\ \lambda_{ij} \in \mathbb{K}\}$$

On note

$$I_n = [\delta_{i,j}]_{1 \leq i,k \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

I_n est la matrice **identité** d'ordre n.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & 1 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Une matrice proportionnelle à la matrice I_n est dite **scalaire**. Les matrices scalaires forment une droite vectorielle dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **diagonale** quand tout ses termes sont nuls sauf éventuellement ceux situés sur la diagonale, autrement dit une matrice diagonale est de la forme :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & \lambda_i & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

où $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$.

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **triangulaire supérieure** quand tout ses termes sont nuls sauf éventuellement ceux situés sur la diagonale, ou au dessus autrement dit une matrice triangulaire supérieure est de la forme :

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & t_{i,j} & \\ & & \lambda_i & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Les matrices triangulaires inférieures sont définies de manière analogue.

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **symétrique** quand $M^T = M$.
On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des telles matrices.

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **anti-symétrique** quand $M^T = -M$.
On note $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des telles matrices.

Les matrices scalaires, diagonales, triangulaires supérieures, triangulaires inférieures forment des sous espaces vectoriels de l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Pour i et j dans $[\![1, n]\!]$, pour rappel, $E_{i,j}$ est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui en i-ème ligne et j-ième colonne qui est un 1, ainsi :

$$E_{i,j} = [\delta_{i,k}\delta_{j,l}]_{1\leq k,l\leq n}$$

On a : Si $A = [\lambda_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors :

$$A = \sum_{1\leq i,j\leq n} \lambda_{i,j} E_{i,j}$$

2 Multiplication des matrices

2.1 Matrices quelconques

On défini le produit matriciel dit **produit lignes colonnes** :

Définition 2 (Produit lignes-colonnes) *$R = [r_{ik}]_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq k\leq p}}$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $S = [s_{kj}]_{\substack{1\leq k\leq p\\1\leq j\leq m}}$ dans $\mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K})$ alors*

$$R.S = RS = [r_{ik}]_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq k\leq p}}.[s_{kj}]_{\substack{1\leq k\leq p\\1\leq j\leq m}} = \left[\sum_{1\leq k\leq p} r_{ik}.s_{kl}\right]_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq m}} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$$

On notera que le produit n'est possible que si le nombre de colonnes de R est le nombre de lignes de S. On parlera de **produit compatible** dans ce cas.

Propriété 1 *On a les règles : si M, N, P sont des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et les produits compatibles :*

- $(MN)P = M(NP) = MNP$
- $(M + N).P = M.P + N.P$
- $M.(N + P) = M.N + M.P$
- $M.\lambda N = \lambda M.N$

Ainsi le produit matriciel est associatif, bilinéaire.

Attention, il n'est pas commutatif !!

Si $X \in \mathbb{K}^n$ est vu comme une matrice colonne et $A = [a_{ik}]_{\substack{1\leq i\leq p\\1\leq j\leq n}} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ alors AX est une matrice colonne de taille p qui peut être vue comme une combinaison linéaire des colonnes de A.

On observe que si i, j, k et l sont des entiers et les produits (de matrices élémentaires !) compatibles alors

$$E_{ij}.E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$$

2.2 Le cas des matrices carrées

Définition 3 (Produit lignes-colonnes) *Si $P = [p_{ik}]_{1\leq i,k\leq n}$ et $Q = [q_{kj}]_{1\leq k,j\leq n}$ sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors*

$$P.Q = [p_{ik}]_{1\leq i,k\leq n}.[q_{kj}]_{1\leq k,j\leq n} = \left[\sum_{1\leq k\leq n} p_{ik}.q_{kj}\right]_{1\leq i,j\leq n}$$

Le produit de 2 matrices carrées de même taille est toujours compatible et si X est un vecteur colonne de taille n, A une matrice carrée de taille n alors AX est une matrice colonne de taille n qui peut être vue comme une combinaison linéaire des colonnes de A.

Propriété 2 *On a les règles : si M, N, P sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$:*
- $MI_n = I_nM = M$
- $(M + N).P = M.P + N.P$
- $M.(N + P) = M.N + M.P$
- $M.\lambda N = \lambda M.N$

Muni du produit lignes colonnes défini plus haut : si $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel et un anneau dont l'élément neutre est I_n.

Si $n \geq 2$, l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **non commutatif**, **non intègre** et admet des éléments **nilpotents**.

Autrement dit, les calculs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont nettement plus délicats que dans les anneaux de nombres.

Les matrices **scalaires** (proportionnelles à I_n) forment un sous anneau commutatif de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et même, tout matrice scalaire commute avec toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On confondra ainsi dans la pratique $\lambda.I_n$ et λ pour $\lambda \in \mathbb{K}$.

On observe que si i, j, k et l sont dans $[\![1, n]\!]$ alors (produit de matrices élémentaires) :

$$E_{ij}.E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$$

Concernant les matrices diagonales et triangulaires, on a les "règles" suivantes (les différents coefficients sont dans $\mathbb{K}$) :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & \lambda_i & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \lambda'_1 & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & \lambda'_i & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & \lambda'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1.\lambda'_1 & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & \lambda_i.\lambda'_i & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n.\lambda'_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & t_{i,j} & \\ & & \lambda_i & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \lambda'_1 & & & & \\ & \ddots & & t'_{i,j} & \\ & & \lambda'_i & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & \lambda'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1.\lambda'_1 & & & & \\ & \ddots & & t''_{i,j} & \\ & & \lambda_i.\lambda'_i & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n.\lambda'_n \end{pmatrix}$$

Ainsi :

L'ensemble des matrices diagonales est un sous anneau commutatif de (l'anneau) $\mathcal{M}_n(K)$.
L'ensemble des matrices triangulaires supérieures et l'ensemble des matrices triangulaires inférieures sont des sous anneaux non commutatifs de (l'anneau) $\mathcal{M}_n(K)$.

Propriété 3 (Formules du binôme et de la série géométrique) *Si A et B sont 2 matrices carrées d'ordre n **qui commutent** ($AB = BA$) et si k est un entier naturel non nul alors :*

$$(A+B)^k = A^k + kA^{k-1}B + \binom{k}{2}A^2B^{k-2} + \cdots + kAB^{k-1} + B^k = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} A^l B^{k-l}$$
$$A^k - B^k = (A-B)\cdot(A^{k-1} + A^{k-2}B + \cdots + AB^{k-2} + B^{k-1})$$
$$A^k - I_n = (A - I_n)\cdot(A^{n-1} + A^{n-2} + \cdots + A + I_n)$$

3 Matrices inversibles

On fixe toujours $n \in \mathbb{N}^*$ et on travaille dans l'anneau unitaire $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ d'unité I_n.

Définition 4 *Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **inversible** quand elle est un élément inversible de l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ c'est à dire quand il existe une matrice $B = A^{-1}$ (qui est alors unique) telle que :*

$$AB = BA = I_n = A.A^{-1} = A^{-1}.A$$

De nombreuse matrices non nulles ne sont pas inversibles.

On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de taille n.

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est **le groupe linéaire d'ordre** n.

Théorème 1 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *est un groupe (multiplicatif) d'élément neutre* I_n*. En particulier, le produit de 2 matrices* M *et* N *inversibles est inversible et, de plus :*

$$(M.N)^{-1} = N^{-1}.M^{-1}$$
$$(M^{-1})^{-1} = M$$

Propriété 4 *La matrice* $M \in \mathcal{M}_n$ *est inversible si et seulement si* M^T *l'est et dans ce cas :*

$$(M^T)^{-1} = (M^{-1})^T$$

Le cas des matrices diagonales est immédiat :

Propriété 5 *Si la matrice* $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *est diagonale, elle est inversible si et seulement si les éléments* $(a_{ii})_{1\leq i\leq n}$ *sur sa diagonale sont non nuls et dans ce cas* A^{-1} *est la matrice diagonale ayant sur sa diagonale les valeurs* $(a_{ii}^{-1})_{1\leq i\leq n}$.

Ainsi, si $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sont dans $\mathbb{K}^*$:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & \lambda_i & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & \lambda_i^{-1} & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix}$$

L'ensemble des matrices diagonales inversibles autrement dit à éléments diagonaux non nuls forme un sous groupe commutatif du groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Au delà des matrices diagonales, la définition donnée ici des matrices inversibles est très mal commode dans les cas pratiques. On utilise plutôt :

Propriété 6 *La matrice* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *est inversible si et seulement si une des conditions équivalentes suivantes est réalisée :*

- *Pour tout vecteur colonne* $B \in \mathbb{K}^n$*, le système d'inconnue* $X \in \mathbb{K}^n$ *:* $AX = B$ *a une et une seule solution.*
- *Le système d'inconnue* $X \in \mathbb{K}^n$ *:* $AX = 0_n$ *a une et une seule solution :* $X = 0_n$.

Dans le cas où A est inversible, le calcul de A^{-1} se pratique à l'aide du pivot de Gauss et en interprétant le calcul sous la forme :

$$A.X = B \iff X = A^{-1}.B$$

Le cas des matrices triangulaires :

Propriété 7 *Si la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est triangulaire supérieure (resp. inférieure), elle est inversible si et seulement si les éléments $(a_{ii})_{1 \leq i \leq n}$ sur sa diagonale sont non nuls et dans ce cas A^{-1} est triangulaire supérieure (resp. inférieure) et a sur sa diagonale les valeurs $(a_{ii}^{-1})_{1 \leq i \leq n}$.*

Ainsi, si $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sont dans $\mathbb{K}^*$:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & t_{ij} & \\ & & \lambda_i & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & & & & \\ & \ddots & & t'_{ij} & \\ & & \lambda_i^{-1} & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix}$$

L'ensemble des matrices triangulaires supérieures inversibles autrement dit à éléments diagonaux non nuls forme un sous groupe non commutatif (si $n \geq 2$) du groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.