Sup MPSI, Lycée Jean Perrin, 15 Décembre 2025.

DS 4, Durée 1h45, calculatrices et téléphones interdits.

Dans tous les exercices, on sera particulièrement attentif et on précisera le domaine des calculs faits.

Questions "de cours"

1. Soit, si n un entier naturel non nul, $P_n(X) = X^n - 1$.
   (a) Quelles sont les racines complexes de P_n ?
   (b) Donner la factorisations en facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}$ du polynôme P_n.
   (c) Donner la décompositions en éléments simples de $1/P_n$ sur $\mathbb{C}$.
2. On considère les suites définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :
$$u_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \quad , \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}$$
   Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

Exercice 2 : Une approche de $\sqrt{3}$

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 3$ et (on admettra que cette définition ne pose pas de problème) pour $n \in \mathbb{N}$:
$$u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \quad , \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

1. Donner les valeurs exactes $u_1, \ldots, u_3$, $v_1, \ldots, v_3$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_n \leq v_n$$
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
4. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite l.
5. Montrer que $l = \sqrt{3}$.
   (On pourra montrer que la suite $(u_n.v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante).

Exercice 3

On considère la fonction définie par $f(x) = x^2 - 2x + 2$ et les suites définies par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Étudier pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $f(x)$ et le signe de $f(x) - x$.
2. Représenter proprement, sur un même graphique, la fonction f et la droite $y = x$.
3. Si $u_0 \in]1, 2[$, étudier (monotonie, convergence) la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Si $u_0 > 2$, étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et préciser sa limite.
5. Si $u_0 \in]0, 1[$, que peut-on dire de u_1 ? Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
6. Si $u_0 < 0$, procéder comme à la question précédente pour étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et préciser sa limite.

Exercice 4

On considère la fonction définie par $f(x) = 1 - x^2$ et la suite

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \begin{cases} u_0 = 1/2 \\ \text{Si } n \in \mathbb{N} \quad : \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

On considère aussi l'expression $P(x) = f(x) - x = 1 - x - x^2$

1. Représenter graphiquement la fonction f et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Montrer que l'intervalle $[0, 1]$ est stable par f.
3. Déterminer le point fixe noté α de f sur $[0, 1]$.
4. Montrer que l'expression $f(f(x)) - x$ est factorisable par $P(x)$ et étudier le signe de $f(f(x)) - x$ sur $[0, 1]$.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 < u_{2(n+1)} < u_{2n} < u_{2n+1} < u_{2(n+1)+1} < 1$$

   On pourra pour cela étudier la fonction $g = f \circ f$ sur $[0, 1]$.
6. Montrer que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et préciser leurs limites respectives.
7. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?