Sup MPSI, Lycée Jean Perrin, 15 Décembre 2025.

DS 4, Correction rapide.

Questions "de cours"

1. Soit, si n un entier naturel non nul, $P_n(X) = X^n - 1$.
   (a) Racines : $z_k = \exp(2ik\pi/2)$, $k \in \{0, .., n-1\}$
   (b)
   $$P_n = \prod_{k=0}^{n-1}(X - \exp(2ik\pi/n))$$
   (c)
   $$1/P_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{\exp(2ik\pi/n)}{X - \exp(2ik\pi/n)}$$
2. Fait en classe

Exercice 2 : Une approche de $\sqrt{3}$

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 3$ et (on admettra que cette définition ne pose pas de problème) pour $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{2u_nv_n}{u_n + v_n} \quad , \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

1. $u_1 = 3/2, u_2 = 12/7, u_3 = 168/97$, $v_1 = 2, v_2 = 7/4, v_3 = 97/56$.
2. Par calcul de la différence : pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$u_n \leq v_n$$
3. Par calcul de différence : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
4. Par la convergence monotone $u_n \to l$ et $v_n \to l'$ réels mais on a $l = \frac{l+l'}{2}$ donc $l = l'$: les suites convergent vers la même limite l.
5. La suite $(u_n.v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et vaut 3. Par suite $l = \sqrt{3}$.

Exercice 3

On considère la fonction définie par $f(x) = x^2 - 2x + 2$ et les suites définies par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. À faire
2. À faire.
3. Si $u_0 \in]1, 2[$, par les méthodes vues en TD : la suite est décroissante et tend vers 1.
4. Si $u_0 > 2$, par les méthodes vues en TD : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et tend vers $+\infty$.
5. Si $u_0 \in]0, 1[$, $u_1 \in]1, 2[$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 1.
6. Si $u_0 < 0$, $u_1 > 2$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

Exercice 4

On considère la fonction définie par $f(x) = 1 - x^2$ et la suite

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \begin{cases} u_0 = 1/2 \\ \text{Si } n \in \mathbb{N} \quad : \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

On considère aussi l'expression $P(x) = f(x) - x = 1 - x - x^2$

1. À faire
2. Pas de problème.
3. Le point fixe de f sur $[0,1]$ est $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
4. $f(f(x)) - x = x(1-x-x^2)(x-1)$.

   Sur $[0,1]$ $f(f(x)) - x$ est négatif avant α positif après.
5. La fonction $g = f \circ f$ est strictement croissante sur $[0,1]$.
   Il suit que par récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}$:

   $$0 < u_{2(n+1)} < u_{2n} < u_{2n+1} < u_{2(n+1)+1} < 1$$
6. Du point précédent, les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones, bornées donc convergentes vers un point fixe de $f \circ f$: 0 pour $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, 1 pour $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
7. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.