# Fiche 35 : Calcul matriciel.

**Exercice 1**

Montrer que les sous groupes de $\mathbb{Z}$ (additif) sous tous de la forme $a\mathbb{Z}$ ($a \in \mathbb{N}$).

**Exercice 2**

Effectuer le produit des matrices :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}$$

**Exercice 3**

On considère la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer $M^2, M^3, M^4, M^5$.

**Exercice 4**

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et soit $B = A - I_3$.
   (a) Calculer $B^2$, $B^3$ $B^n$, pour tout entier $n$.
   (b) Développer $(B + I_3)^n$ par la formule du binome et simplifier.
   (c) En déduire $A^n$ Pour tout entier $n$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pour tout entier $n$, calculer $A^n$ en utilisant $A - I_4$.

**Exercice 5**

Soit $G = \left\{ \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, n \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R} \right\}$. Montrer que $G$ est un groupe multiplicatif.

**Exercice 6**

Soit $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $A(\theta) \times A(\theta')$ et $\big(A(\theta)\big)^n$ pour $n \geq 1$.

**Exercice 7**

Soit $A$ une matrice carrée d'ordre $n$ ; on suppose que $A^2$ est une combinaison linéaire de $A$ et $I_n$ : $A^2 = \alpha A + \beta I_n$, $\beta$ non nul.

1. Montrer que $A^n$ est également une combinaison linéaire de $A$ et $I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer que $A$ est inversible et que $A^{-1}$ est encore combinaison linéaire de $A$ et $I_n$.
3. Application 1 : soit $A = J_n - I_n$, où $J_n$ est la matrice remplie de 1, avec $n \geq 1$. Montrer que $A$ est inversible, et déterminer son inverse.
4. Application 2 : Si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, montrer que $A^2$ est toujours une combinaison linéaire de $A$ et $I_2$.
   Que peut-t-on en déduire ?