

## Fiche 36 : Td du 18-12.

### Exercice 1

On pose, si  $n \in \mathbb{N}$  :  $f_n(x) = x^5 + nx$ .

1. Montrer que si  $n \in \mathbb{N}$ , il existe un unique  $\lambda_n \in \mathbb{R}$  tel que  $f_n(\lambda_n) = 1$ .
2. Montrer que la suite  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante et tend vers 0.
3. Quelle est la limite de la suite  $(n\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ?

### Exercice 2

On considère les suites  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(i_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies par :  $i_0 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ,  $e_0 = 3\sqrt{3}$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$e_{n+1} = \frac{2e_n i_n}{e_n + i_n} \text{ et } i_{n+1} = \sqrt{i_n \times e_{n+1}}$$

On admettra que ces suites sont bien définies et strictement positives.

1. Montrer que, si  $n \in \mathbb{N}$  :

$$i_n \leq i_{n+1} \leq e_{n+1} \leq e_n$$

*On pourra commencer par montrer que si  $0 < a < b$  alors si on pose  $b' = \frac{2ab}{a+b}$  et  $a' = \sqrt{ab'}$  alors :  $a < a' < b' < b$ .*

2. Montrer que  $(i_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont adjacentes.

*Leur limite commune est le nombre  $\pi$  ce qu'on ne demande pas de vérifier ici.*

3. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$e_n - i_n \leq \frac{1}{2^n}(e_0 - i_0)$$

### Exercice 3

On note  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+$  par  $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$  et on définit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par :  $u_0 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$  :

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

On note enfin  $\phi$  la racine positive de l'équation  $x^2 = x + 1$ .

1. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n$  est bien défini et est strictement positif.
2. Donner, sous forme de fractions, les valeurs de  $u_1$ ;  $u_2$ ;  $u_3$ ;  $u_4$ ;  $u_5$ .
3. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n$  est un nombre rationnel.
4. Représenter sur un même graphique la fonction  $f$ , le nombre  $\phi$  et les six premières valeurs de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . *On peut utiliser le fait que  $\phi \simeq 1,62$*
5. Si on suppose que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge, quelle est la valeur de sa limite ?
6. Démontrer que la suite  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante et majorée par  $\phi$  et que la suite  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante et minorée par  $\phi$ .
7. Démontrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et préciser sa limite.

On définit deux suites  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par  $p_0 = q_0 = 1$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$\begin{cases} p_{n+1} = p_n + q_n \\ q_{n+1} = p_n \end{cases}$$

On admet que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $p_n$  et  $q_n$  sont bien définis et sont des nombres entiers strictement positifs.

8. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1} = (-1)^n$ .
9. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $\frac{p_n}{q_n}$  est la fraction irréductible égale à  $u_n$ .
10. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $|u_n - \phi| \leq \frac{1}{2^n}$ .