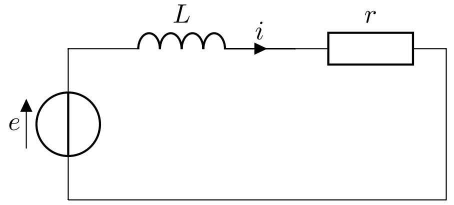
Exercice 1. Étude d'une bobine réelle

Le montage effectué est :



1. En régime stationnaire, l'inductance est équivalente à un fil. Avec la loi d'Ohm on a $\boxed{r = \dfrac{E}{I} = 8{,}7\,\Omega}$.
   En RSF, la bobine a pour impédance complexe $\underline{Z} = r + Lj\omega$. Avec la loi d'Ohm complexe, $\underline{Z} = \dfrac{\underline{e}}{\underline{i}}$ donc l'impédance $Z = |\underline{Z}| = \dfrac{U_m}{I_m}$. Puisque $Z = \sqrt{r^2 + (L\omega)^2}$, il vient $(L\omega)^2 = Z^2 - r^2$ puis $L = \dfrac{\sqrt{Z^2 - r^2}}{\omega}$ soit :
   $$\boxed{L = \frac{1}{2\pi f}\sqrt{\left(\frac{U_m}{I_m}\right)^2 - r^2} = 0{,}12\,\mathrm{H}}$$
2. $\Delta\varphi_{i/e} = \arg\left(\dfrac{\underline{i}}{\underline{e}}\right) = -\arg(\underline{Z}) = -\arctan\left(\dfrac{L\omega}{R}\right)$ soit :
   $$\boxed{\Delta\varphi_{i/e} = -\arctan\left(\frac{2\pi f L}{R}\right) = -1{,}3\,\mathrm{rad}}$$

Exercice 2. Etude d'un dipôle inconnu

1. On a un diviseur de tension : $\boxed{\underline{u} = \dfrac{R}{R + \underline{Z}}\underline{e}}$.
2. Donc $\boxed{\dfrac{\underline{e}}{\underline{u}} = 1 + \dfrac{\underline{Z}}{R} = \left(1 + \dfrac{Z_r}{R}\right) + j\dfrac{Z_i}{R}}$.
3. La période s'étend sur 8 divisions soit $T = 80\,\mu\mathrm{s}$ d'où $\underline{f = 12{,}5\,\mathrm{kHz}}$.
   L'amplitude de e s'étend sur 3,0 divisions, soit $E_m = 6{,}0\,\mathrm{V}$. L'amplitude de u s'étend sur 1,6 divisions, soit $U_m = 3{,}2\,\mathrm{V}$.
   Le déphasage est calculé à partir du décalage temporel τ : $|\Delta\varphi| = 2\pi f\tau$. τ représente 1,2 divisions et T 8 divisions donc $|\Delta\varphi| = 3\pi/10$. e est en retard sur u donc $\underline{\Delta\varphi = -3\pi/10}$.
4. $\dfrac{\underline{e}}{\underline{u}} = \dfrac{E_m}{U_m}e^{j\Delta\varphi_{e/u}} = \dfrac{E_m}{U_m}\big(\cos(\Delta\varphi_{e/u}) + j\sin(\Delta\varphi_{e/u})\big)$.
   En identifiant les deux expressions de $\dfrac{\underline{e}}{\underline{u}}$, on obtient : $1 + Z_r/R = \dfrac{E_m}{U_m}\cos(\Delta\varphi)$ et $Z_i/R = \dfrac{E_m}{U_m}\sin(\Delta\varphi)$.
   Pour conclure $\boxed{Z_r = R\left(\dfrac{E_m}{U_m}\cos(\Delta\varphi) - 1\right)} = \underline{48\,\Omega}$ et $\boxed{Z_i = R\dfrac{E_m}{U_m}\sin(\Delta\varphi)} = \underline{-713\,\Omega}$.
5. On peut choisir une association en série d'une résistor et d'un condensateur : $\underline{Z} = R + \dfrac{1}{j\omega C}$. Alors $\boxed{R = Z_r} = \underline{48\,\Omega}$ et $Z_i = -\dfrac{1}{C\omega}$, d'où $\boxed{C = \dfrac{1}{|Z_i|\omega}} = \underline{18\,\mathrm{nF}}$.

Exercice 3. Résonance floue

1. Pour $f = f_0$ soit $x = 1$, $\underline{U}(= -jQ\underline{E}$.
   On en déduit l'amplitude $\boxed{U(f_0) = QE}$ et le déphasage $\boxed{\Delta\varphi_{u/e}(f_0) = -\pi/2}$.
2. La valeur de E est égale à l'amplitude à fréquence nulle : on lit $\underline{E = U(0) = 1{,}00\,\mathrm{V}}$.
   La fréquence propre f_0 correspond au passage du déphase par $-\pi/2$: $\underline{f_0 = 800\,\mathrm{Hz}}$.
   On mesure l'amplitude en f_0 pour obtenir le facteur de qualité : $Q = \dfrac{U(f_0)}{E} = \underline{1}$.
3. $\omega_0 = 2\pi f_0 = 1/\sqrt{LC}$ donc $\boxed{L = \dfrac{1}{C(2\pi f_0)^2}} = \underline{49\,\mathrm{mH}}$. $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ donc $\boxed{R = \dfrac{1}{Q}\sqrt{\dfrac{L}{C}}} = \underline{249\,\Omega}$.
4. Pour $Q = 1$, $\underline{U} = \dfrac{\underline{E}}{1 + jx - x^2}$ donc $U = \dfrac{E}{\sqrt{(1-x^2)^2 + x^2}} = \dfrac{E}{\sqrt{1 - x^2 + x^4}}$.
   Le terme sous la racine est minimal lorsque sa dérivée s'annule, soit $-2x_r + 4x_r^3 = 0$ donc $x_r = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Donc $\boxed{f_r = \dfrac{f_0}{\sqrt{2}}} = \underline{566\,\mathrm{Hz}}$ ce qui conforme à l'expérience.
   L'amplitude maximale vaut alors $U_{\max} = U(x_r) = \dfrac{E}{\sqrt{(1-1/2)^2 + 1/2}}$ soit $\boxed{U_{\max} = \dfrac{2E}{\sqrt{3}}} = \underline{1{,}15\,\mathrm{V}}$ ce qui est conforme à l'expérience.

Exercice 4. Étude d'un circuit en RSF

1. Par la relation du diviseur de tension $\dfrac{\underline{u}}{\underline{v}} = \dfrac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + R} = \dfrac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega} + R}$ d'où $\boxed{\dfrac{\underline{u}}{\underline{v}} = \dfrac{1}{1 + jRC\omega}}$.
2. v est aux bornes du dipôle constitué de C en parallèle avec RC série. L'impédance de ce dipôle vaut $\underline{Z}_{eq} = \dfrac{\frac{1}{jC\omega} \times \left(R + \frac{1}{jC\omega}\right)}{\frac{1}{jC\omega} + \left(R + \frac{1}{jC\omega}\right)}$ soit $\boxed{\underline{Z}_{eq} = \dfrac{1 + jRC\omega}{jC\omega(1 + 1 + jRC\omega)}}$.

   Avec la relation du diviseur de tension, $\dfrac{\underline{v}}{\underline{e}} = \dfrac{\underline{Z}_{eq}}{\underline{Z}_{eq} + R} = \dfrac{1}{1 + R/\underline{Z}_{eq}}$.

   $1 + R/\underline{Z}_{eq} = 1 + \dfrac{jRC\omega(2 + jRC\omega)}{1 + jRC\omega} = \dfrac{1 + 3jRC\omega + (jRC\omega)^2}{1 + jRC\omega}$ donc $\boxed{\dfrac{\underline{v}}{\underline{e}} = \dfrac{1 + jRC\omega}{1 + 3jRC\omega + (jRC\omega)^2}}$.
3. Alors $\boxed{\dfrac{\underline{u}}{\underline{e}} = \dfrac{\underline{u}}{\underline{v}} \times \dfrac{\underline{v}}{\underline{e}} = \dfrac{1}{1 + 3jRC\omega + (jRC\omega)^2}}$.
4. Cette équation s'écrit aussi : $\underline{u} + 3RC(j\omega)\underline{u} + (RC)^2(j\omega)^2\underline{u} = \underline{e}$. L'équation différentielle associée est :
$$\boxed{(RC)^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + 3RC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u(t) = e(t)}$$

Exercice 5. Circuit R-LC

1. On utilise la relation du diviseur de tension :
   $\underline{u} = \dfrac{\underline{Z}_{[L,C]}}{R + \underline{Z}_{[L,C]}}\underline{e} = \dfrac{1}{1 + R/\underline{Z}_{[L,C]}}\underline{e} = \dfrac{1}{1 + R \times \left(\frac{1}{\underline{Z}_L} + \frac{1}{\underline{Z}_C}\right)}\underline{e}$

   soit $\boxed{\underline{u} = \dfrac{\underline{e}}{1 + R \times \left(jC\omega + \dfrac{1}{jL\omega}\right)}}$.
2. L'amplitude de u est $\boxed{U_m = |\underline{u}| = \dfrac{E}{\sqrt{1 + R^2 \times \left(C\omega - \dfrac{1}{L\omega}\right)^2}}}$.

   U_m prend une valeur maximale lorsque le dénominateur est minimal, donc pour $\omega = \omega_r$ tel que $C\omega_r - 1/(L\omega_r) = 0$ soit $LC\omega_r^2 = 1$. La résonance se produit à la fréquence $\boxed{f_r = \dfrac{\omega_r}{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}}$.
3. $U_{m,\max} = U_m(\omega_r) = E$ donc $U(\omega_i) = \dfrac{E}{\sqrt{2}}$ d'où $R^2 \times \left(C\omega_i - \dfrac{1}{L\omega_i}\right)^2 = 1$. On en déduit $C\omega_i - \dfrac{1}{L\omega_i} = \pm\dfrac{1}{R}$ soit $LC\omega_i^2 - 1 = \pm\dfrac{L}{R}\omega_i$.

   On traite les deux signes séparément :
   - Pour le signe $+$, ω_i est solution positive de l'équation : $LC\omega_i^2 - \dfrac{L}{R}\omega_i - 1 = 0$. Il s'agit de $\omega_2 = \dfrac{1}{2RC} + \dfrac{1}{2LC}\sqrt{\left(\dfrac{L}{R}\right)^2 + 4LC}$.
   - Pour le signe $-$, ω_i est solution positive de l'équation : $LC\omega_i^2 + \dfrac{L}{R}\omega_i - 1 = 0$. Il s'agit de $\omega_1 = -\dfrac{1}{2RC} + \dfrac{1}{2LC}\sqrt{\left(\dfrac{L}{R}\right)^2 + 4LC}$.

   On obtient $\boxed{\Delta f = \dfrac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi RC}}$.
4. On mesure $\underline{f_r = 2{,}4\,\mathrm{kHz}}$. L'amplitude maximale valant $6{,}0\,\mathrm{V}$, la largeur du pic de résonance correspond aux amplitudes supérieures à $4{,}2\,\mathrm{V}$: il est délimité par les fréquences $f_1 = 1{,}7\,\mathrm{kHz}$ et $f_2 = 3{,}3\,\mathrm{kHz}$ donc la largeur vaut $\underline{\Delta f = 1{,}6\,\mathrm{kHz}}$.
5. Il vient $\boxed{C = \dfrac{1}{2\pi R\Delta f}} = \underline{99\,\mathrm{nF}}$ et $\boxed{L = \dfrac{1}{4\pi^2 C f_r^2}} = \underline{44\,\mathrm{mH}}$.

Exercice 6. Suspension automobile sur route ondulée

1. À l'équilibre, le poids du quart du véhicule $\vec{P} = -\frac{m}{4}\vec{e}_z$ est compensé par la force de rappel du ressort de la suspension $\vec{T} = -k(\ell_e - \ell_0)\vec{e}_z$.
$\vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$ d'où $\ell_e = \ell_0 - \frac{mg}{k}$. La valeur de z à l'équilibre est alors $\boxed{z_e = \ell_e + R = R + \ell_0 - \frac{mg}{k}}$.
2. Lorsque le véhicule est en mouvement et que la route change d'altitude, la longueur du ressort est $\ell = z - e - R$ si bien que la force de rappel du ressort sur le véhicule est $\vec{T} = -k(z - e - R - \ell_0)\vec{e}_z$. La vitesse verticale du chassis relativement à l'axe des roues est $\vec{v} = (\dot{z} - \dot{e})\vec{e}_z$ donc la force de frottement visqueux est $\vec{F} = -\lambda(\dot{z} - \dot{e})\vec{e}_z$. Le théorème du centre d'inertie appliqué au véhicule s'écrit $\vec{P} + \vec{F} + \vec{T} = m\vec{a} = m\ddot{z}\vec{e}_z$ en ne considérant que le mouvement vertical. Il vient : $m\ddot{z} = -mg - \lambda(\dot{z} - \dot{e}) - k(z - e - R - \ell_0)$ qui se met sous la forme :
$$\ddot{z} + \frac{\lambda}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{\lambda}{m}\dot{e} + \frac{k}{m}e + \frac{k}{m}\left(\ell_0 + R - \frac{mg}{k}\right)$$
C'est l'expression proposée, avec $\boxed{\alpha = \frac{\lambda}{m}}$, $\boxed{\beta = \frac{k}{m}}$ et $\boxed{f(t) = \alpha\dot{e}(t) + \beta e(t) + \beta z_e}$.
3. La distance entre deux bosses successives est la période de la fonction $e(x)$: $\boxed{L = \frac{2\pi}{\gamma}}$.
Si la vitesse est V, la période temporelle est la durée écoulée entre deux bosses successives : $T = \frac{L}{V}$ d'où la pulsation $\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = \gamma V}$.
4. L'équation différentielle vérifiée par $s(t)$ est $\ddot{s} + \alpha\dot{s} + \beta s = \alpha\dot{e} + \beta e$.
En utilisant les amplitudes complexes, on obtient en RSF : $-\omega^2\underline{S} + \alpha(j\omega)\underline{S} + \beta\underline{S} = \alpha(j\omega)\underline{E} + \beta\underline{E}$. En remarquant que $\underline{E} = e_m$, on obtient :
$$\underline{S} = e_m\frac{j\omega\alpha + \beta}{-\omega^2 + j\omega\alpha + \beta} = e_m\frac{1 + \frac{j\omega\alpha}{\beta}}{1 - \frac{\omega^2}{\beta} + \frac{j\omega\alpha}{\beta}}$$
C'est l'expression proposée en posant $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\beta} = \sqrt{\frac{k}{m}}}$ (pulsation prorpe) et $\boxed{Q = \frac{\beta}{\alpha\omega_0} = \frac{\sqrt{\beta}}{\alpha} = \frac{\sqrt{km}}{\lambda}}$.
5. $\boxed{S_m = |\underline{S}| = e_m\sqrt{\frac{1 + (\Omega/Q)^2}{(1 - \Omega^2)^2 + (\Omega/Q)^2}}}$.
Lorsque $\Omega \to 0$, $S_m \to e_m$ et lorsque $\Omega \to \infty$, $S \to 0$.
6. $Q = 0{,}56$; $\boxed{\Omega_r = 0{,}73}$. À la résonance on a $\frac{S_{m,\max}}{e_m} = 1{,}2$.
Voir graphe ci-dessous.
7. $\omega_0 = 14{,}0\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$ donc la résonance se fait à la pulsation $\omega_r = \Omega_r\omega_0 = 10{,}3\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$ donc pour une vitesse $\boxed{V_r = \frac{\omega_r L}{2\pi} = 16{,}3\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}$ soit environ $60\,\mathrm{km/h}$ qui est une valeur assez commune : cette route est dangereuse (même si l'amplitude de résonance est relativement faible). Il faut soit rouler bien plus doucement, la voiture suit alors les ondulations ; soit rouler bien plus vite et alors elle n'oscille pas du tout.