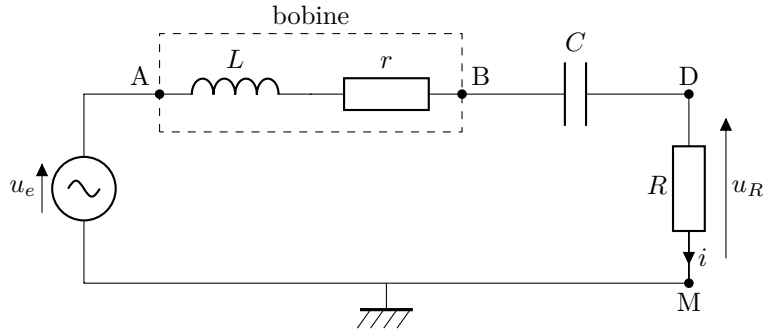


PROBLÈME I

Étude expérimentale d'une bobine

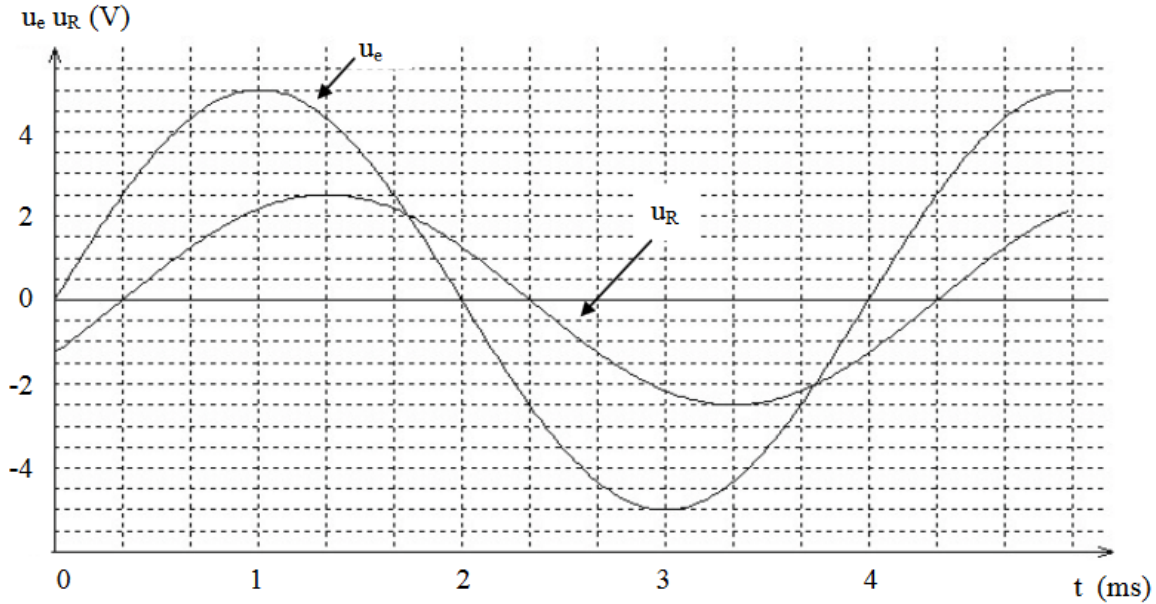
On dispose d'une bobine que l'on assimilera à l'association série d'une inductance L et d'une résistance r , dont on souhaite déterminer expérimentalement les valeurs.



On place en série avec la bobine, dans le circuit schématisé ci-dessus, un résistor de résistance $R = 40\ \Omega$ et un condensateur de capacité $C = 10\ \mu\text{F}$. Le GBF (générateur basses fréquences) est réglé pour délivrer une tension sinusoïdale d'amplitude constante $U_e = 5\ \text{V}$.

Partie A. Étude d'un oscillogramme

On se place à la fréquence $f = 250\ \text{Hz}$. Les tensions u_e et u_R sont visualisées respectivement sur les voies 1 et 2 d'un oscilloscope. On obtient l'oscillogramme ci-dessous.



I.1) Déterminer graphiquement l'amplitude U_R de la tension u_R et en déduire l'amplitude I du courant i .

I.2) En déduire la valeur numérique du module de l'impédance \underline{Z}_{AM} du dipôle AM.

I.3) Sur l'oscillogramme, mesurer précisément le déphasage $\Delta\varphi_{u_e/u_R}$ de u_e par rapport à u_R . Quel est le lien entre ce déphasage et l'argument de l'impédance $\varphi = \arg(\underline{Z}_{AM})$?

I.4) Exprimer l'impédance complexe \underline{Z}_{AM} en fonction de ω et des paramètres du circuit. En déduire l'expression de r en fonction de R , $|\underline{Z}_{AM}|$ et φ . Calculer sa valeur.

I.5) Exprimer L en fonction de C , ω , $|\underline{Z}_{AM}|$ et φ . Calculer sa valeur.

Partie B. Résonance

On fait maintenant varier la fréquence f du GBF. En régime sinusoïdal forcé, $u_e(t) = U_e \cos(\omega t)$ et $u_R(t) = U_R \cos(\omega t + \psi)$ où $\omega = 2\pi f$. On utilise la notation complexe.

I.6) Exprimer l'amplitude complexe $\underline{U}_R = U_R e^{j\psi}$ de la tension aux bornes de R , en fonction de r , R , L , C , ω et U_e .

I.7) Justifier que u_R admet une résonance et déterminer l'expression de la pulsation ω_r pour laquelle elle se produit. Exprimer son amplitude à la résonance.

I.8) Expérimentalement, on mesure la valeur efficace de u_R à l'aide d'un multimètre. Elle passe par la valeur maximale 2,04 V pour une fréquence $f_r = 196$ Hz. En déduire les valeurs de r et L .

Partie C. Annulation du déphasage

On revient à $f = 250$ Hz. On souhaite que u_R soit en phase avec u_e dans le circuit. Pour ce faire, on place un condensateur de capacité C' en parallèle de AD.

I.9) Justifier le choix d'un condensateur pour réaliser l'annulation du déphasage.

I.10) Déterminer la valeur de C' nécessaire.

PROBLÈME II

Accordeur de guitare

Nous allons étudier quelques aspects d'un accordeur de guitare. La problématique est la suivante.

La guitare comporte six cordes : Mi grave, La, Ré, Sol, Si, Mi aigu. Les fréquences fondamentales théoriques des sons émis par ces cordes, notées f_{ac} sont données dans le tableau suivant.

Corde	Mi grave	La	Ré	Sol	Si	Mi aigu
Fréquence f_{ac} (Hz)	82,4	110,0	146,8	196,0	246,9	329,6

On souhaite accorder une corde *légèrement* désaccordée : on notera f_{co} la fréquence fondamentale du son émis par la corde en question.

L'accordeur enregistre le signal $u_e(t)$ provenant de l'excitation de la corde à accorder, puis lui fait subir 3 filtres successifs avant de le comparer à un signal de fréquence f_{ac} . Le but de ce problème est d'étudier l'action de ces 3 filtres successifs.

Partie A. Le signal

La figure 1 montre un exemple de signal électrique à la sortie du micro d'une guitare électrique, et la figure 2 montre son spectre.

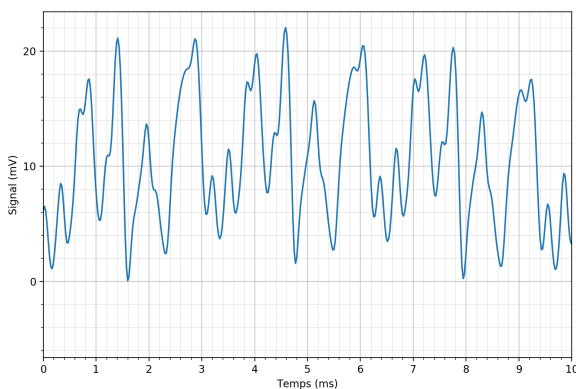


FIGURE 1 – Signal

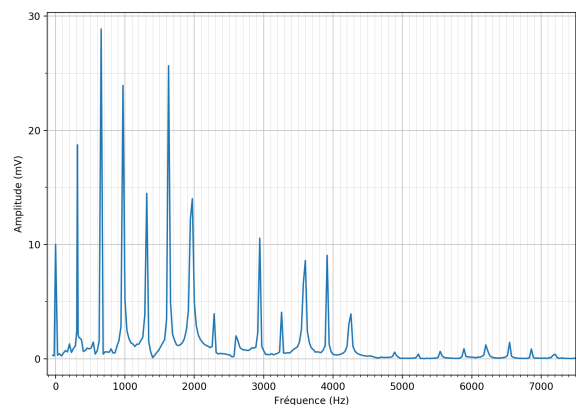


FIGURE 2 – Spectre

II.1) Donner une valeur approchée de la valeur moyenne du signal. Justifier que le spectre est en accord avec cette valeur.

II.2) Donner une estimation de la valeur de la fréquence de ce signal (on peut supposer qu'en première approximation le signal est périodique). Justifier que le spectre est en accord avec cette valeur.

De quelle corde de guitare s'agit-il ?

II.3) Quelle caractéristique du signal permet de justifier la présence de plusieurs harmoniques dans le spectre ?

Partie B. Premier filtre

Avant toute chose, le signal électrique provenant du micro de la guitare est envoyé sur le filtre de la figure 3 (filtre (F_a)).

II.4) En supposant l'entrée sinusoïdale, définir et exprimer la fonction de transfert $\underline{H}_1(j\omega) = \frac{\underline{u}_1}{\underline{u}_e}$ de ce filtre en fonction de R_1 , C_1 et de la pulsation ω du signal.

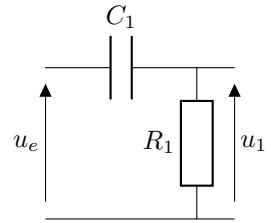


FIGURE 3 – Filtre (F_a)

II.5) De quel type de filtre s'agit-il ? Faire apparaître une pulsation caractéristique ω_1 en fonction de R_1 et C_1 et préciser sa signification.

II.6) Tracer sans calcul l'allure du diagramme de Bode asymptotique relatif au gain.

II.7) On a choisi $R_1 = 100 \text{ k}\Omega$ et $C_1 = 100 \text{ nF}$. Calculer la fréquence de coupure f_1 à -3 dB de ce filtre. Quel est le rôle de ce premier filtre ?

Partie C. Deuxième filtre

Dans cette partie, les montages contiennent un composant actif un peu particulier : l'Amplificateur Linéaire Intégré (A.L.I.), représenté par un gros rectangle avec deux bornes d'entrée (+ et -) et une borne de sortie.

On suppose qu'il a une impédance d'entrée infinie, ce qui signifie qu'aucun courant n'entre par les bornes d'entrée. De plus, son gain est supposé infini, si bien que la tension entre ses bornes d'entrée est nulle.

On étudie pour commencer le filtre de la figure 4.

II.8) En utilisant les propriétés de l'A.L.I., montrer que sa fonction de transfert s'écrit : $\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = 1 + \frac{\underline{Z}'}{\underline{Z}}$.

II.9) Que devient \underline{H} si \underline{Z} et \underline{Z}' sont des résistances ($\underline{Z} = R$, $\underline{Z}' = R'$) ? Quel est, dans ce cas, l'intérêt du montage ?

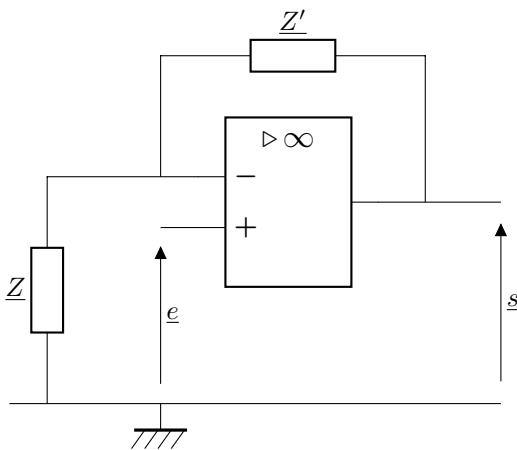


FIGURE 4 – Filtre à A.L.I.

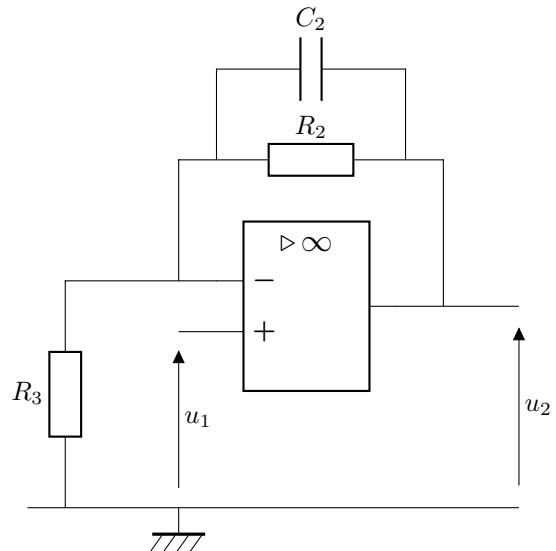


FIGURE 5 – Filtre (F_b)

En sortie du filtre de la figure 3 le signal $u_1(t)$ est envoyé sur le filtre de la figure 5 (filtre (F_b)).

II.10) Quelle est l'impédance \underline{Z}_{eq} de la branche constituée par R_2 en parallèle avec C_2 ?

II.11) Dédurre de la question II.8) l'expression de la fonction de transfert \underline{H}_2 de ce filtre en fonction de R_2 , R_3 et C_2 .

II.12) Mettre \underline{H}_2 sous la forme $\underline{H}_2(j\omega) = 1 + \frac{G_0}{1 + j\omega/\omega_2}$ et donner les expressions de G_0 et ω_2 .

II.13) Quelle est la limite de $|\underline{H}_2|$ en régime basse fréquence ? en régime haute fréquence ?

II.14) Calculer numériquement la fréquence caractéristique f_2 correspondant à ω_2 si $R_2 = 680\text{ k}\Omega$, $R_3 = 6\text{ k}\Omega$ et $C_2 = 470\text{ pF}$ ainsi que son gain G_0 . Expliquer quel est le rôle de ce second filtre.

Partie D. Troisième filtre

On souhaite maintenant sélectionner la fréquence fondamentale f_{co} du signal u_2 , dont la valeur est à priori voisine de celle de la fréquence fondamentale théorique de vibration de la corde sélectionnée sur l'accordeur (f_{ac}) (on suppose que la corde est légèrement désaccordée).

Le principe du filtre (F_c) est que sa fréquence caractéristique soit réglée par le signal de référence de fréquence f_{ac} . Il est ainsi spécifique à chaque corde.

La figure 6 (page suivante) représente le diagramme de Bode relatif au gain du filtre (F_c) tracé à deux échelles différentes.

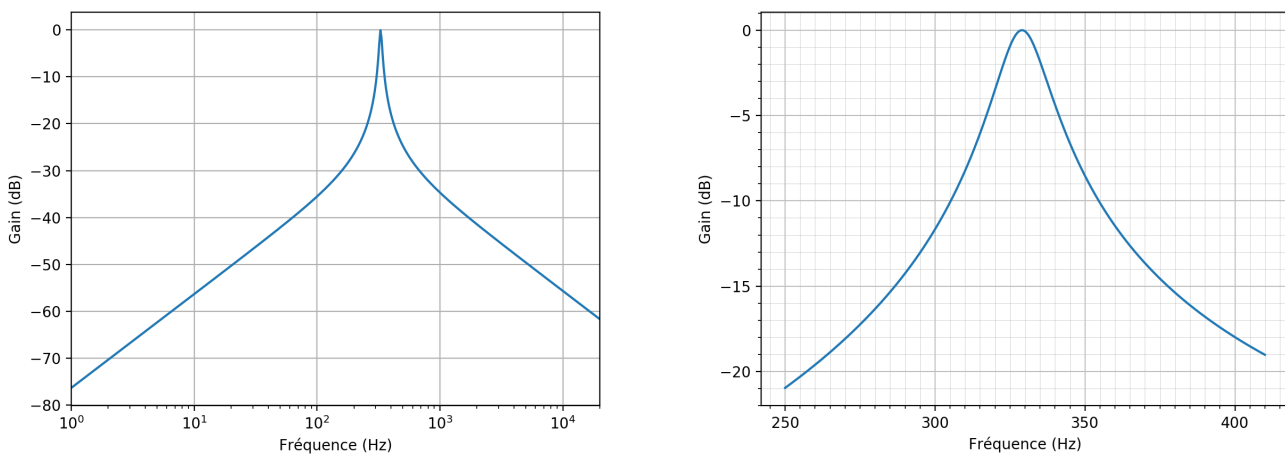


FIGURE 6 – Diagramme de Bode en gain du filtre (F_c)

II.15) Dire en le justifiant rapidement, de quel type de filtre il s'agit, ainsi que son ordre. Quelle est sa fréquence centrale caractéristique ?

II.16) Donner une estimation de sa bande-passante à -3 dB .

II.17) Proposer, en le justifiant, un quadripôle simple permettant de réaliser ce filtre. Donner des valeurs de composants en accord avec la fréquence centrale caractéristique et la bande passante.

II.18) Si la corde est désaccordée à $f_{co} = 315\text{ Hz}$, estimer, en le justifiant, de quel facteur est atténuée sa composante spectrale fondamentale en sortie de ce filtre.

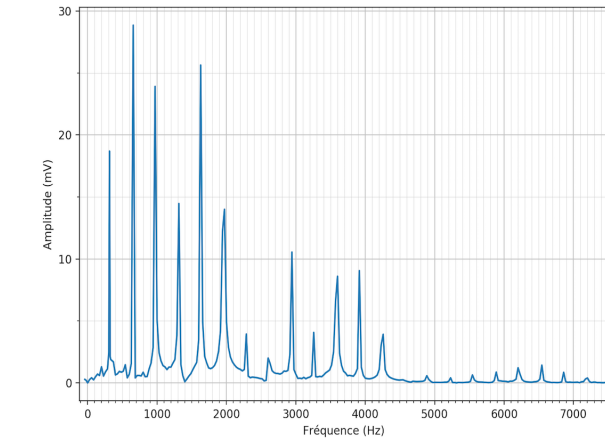
Partie E. Analyse spectrale

On représente page suivante 4 spectres possibles pour les signaux rencontrés dans l'accordeur. On rappelle que la figure 2 représente le spectre du signal d'entrée u_e .

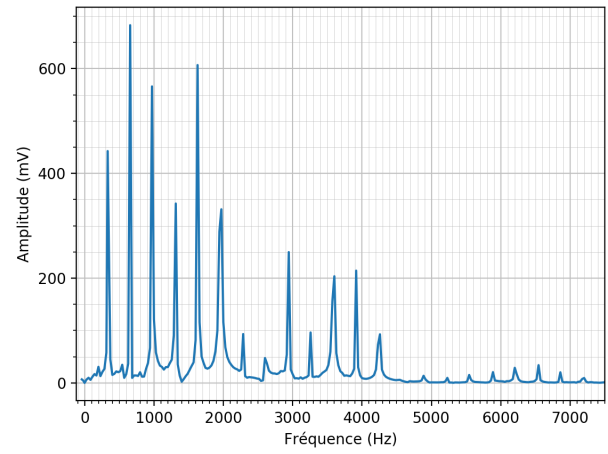
II.19) En le justifiant soigneusement, dire quel spectre correspond à la sortie du premier filtre (F_a).

II.20) Même question, pour la sortie du filtre (F_b).

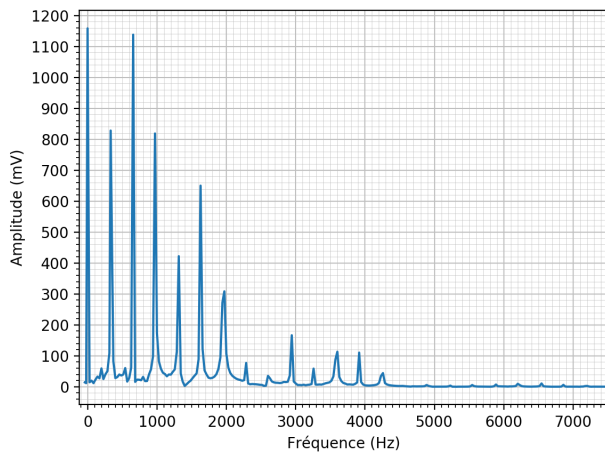
II.21) Tracer l'allure du spectre du signal en sortie du filtre (F_c). Tracer l'allure du signal (temporel) correspondant.



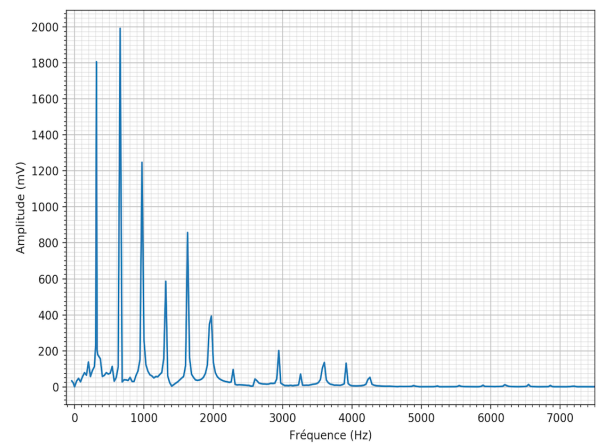
(a)



(b)



(c)



(d)

FIGURE 7 – Spectres

PROBLÈME I

Étude expérimentale d'une bobine

Partie A. Étude d'un oscillogramme

I.1) $U_R = 2,50 \text{ V}$ donc $I = \frac{U_R}{R} = 62,5 \text{ mA}$.

I.2) Le dipôle AM est soumis à la tension u_e . Donc $\underline{Z}_{AM} = \frac{u_e}{i}$ et $|\underline{Z}_{AM}| = \frac{U_e}{I} = 80 \Omega$.

I.3) u_e est en avance sur u_R donc le déphasage est positif. On mesure l'écart temporel $\Delta t = \frac{1}{3} \text{ ms}$.

Alors $\Delta\varphi_{u_e/u_R} = 2\pi f \Delta t = \frac{\pi}{6} \text{ rad} = 30,0^\circ$.

Puisque $u_R = Ri$, ce déphasage est aussi celui de u_e par rapport à i , qui est par définition l'argument de \underline{Z}_{AM} .

I.4) Les impédances de dipôles en série s'ajoutent : $\underline{Z}_{AM} = \underline{Z}_L + \underline{Z}_r + \underline{Z}_C + \underline{Z}_R = R + r + Lj\omega + \frac{1}{Cj\omega}$.

La partie réelle de cette impédance est $R + r$. Or $\text{Re}(\underline{Z}_{AM}) = |\underline{Z}_{AM}| \cos(\varphi)$. On en déduit $r = |\underline{Z}_{AM}| \cos(\varphi) - R = 29,3 \Omega$.

I.5) La partie imaginaire de cette impédance est $L\omega - \frac{1}{C\omega}$. Or $\text{Im}(\underline{Z}_{AM}) = |\underline{Z}_{AM}| \sin(\varphi)$.

On a donc $L = \frac{|\underline{Z}_{AM}| \sin(\varphi)}{2\pi f} + \frac{1}{4\pi^2 f^2 C} = 66,0 \text{ mH}$.

Partie B. Résonance

I.6) En utilisant le diviseur de tension, $\underline{u}_R = \frac{\underline{Z}_R}{\underline{Z}_{AM}} u_e = \frac{R}{R + r + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} u_e$.

En passant aux amplitudes complexes (division par $e^{j\omega t}$) il vient : $\underline{U}_R = \frac{\frac{R}{R+r} U_e}{1 + j \left(\frac{L\omega}{R+r} - \frac{1}{(R+r)C\omega} \right)}$.

I.7) L'amplitude réelle a pour expression : $U_R = |\underline{U}_R| = \frac{\frac{R}{R+r} U_e}{\sqrt{1 + \left(\frac{L\omega}{R+r} - \frac{1}{(R+r)C\omega} \right)^2}}$.

Elle passe par un maximum si le dénominateur passe par un minimum, ce qui se produit lorsque $\frac{L\omega}{R+r} - \frac{1}{(R+r)C\omega} = 0$ car alors le dénominateur atteint sa borne inférieure qui est 1.

À la résonance, la pulsation est $\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et l'amplitude $U_R(\omega_r) = \frac{R}{R+r} U_e$.

I.8) Inversement, $L = \frac{1}{\omega_r^2 C} = \frac{1}{4\pi^2 f_r^2 C} = 65,9 \text{ mH}$ et $r = R \left(\frac{U_e}{U_R} - 1 \right) = R \left(\frac{\sqrt{2} U_e}{U_{R,\text{eff}}} - 1 \right) = 29,3 \Omega$.

Ces résultats concordent avec ceux obtenus dans la première partie.

Partie C. Annulation du déphasage

I.9) u_e est en avance sur u_R donc sur i . Cela vient du fait que la partie imaginaire de l'impédance du circuit est positive. Pour la diminuer jusqu'à son annulation, on ajoute un composant dont l'impédance a une partie imaginaire négative, soit un condensateur.

I.10) R ayant une impédance réelle, il faut que l'impédance entre A et D soit réelle aussi, et son admittance également.

Après mise en parallèle de C' cette admittance a pour expression $\underline{Y} = \underline{Y}_{C'} + \underline{Y}_{AD} = C'j\omega + \frac{1}{r + Lj\omega + \frac{1}{Cj\omega}} = jC'\omega +$

$\frac{jC\omega}{1 + jrC\omega - LC\omega^2}$. Sa partie imaginaire est $Im(\underline{Y}) = C'\omega + \frac{C\omega(1 - LC\omega^2)}{(1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2}$.

Il y a annulation de la partie imaginaire pour $C' = C \frac{LC\omega^2 - 1}{(1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2} = 10 \mu F$.

PROBLÈME II

Accordeur de guitare

Partie A. Le signal

II.1) La valeur moyenne du signal est de 10 mV. Ceci correspond à l'amplitude du pic à fréquence nulle, c'est-à-dire de la composante continue, ce qui est cohérent.

II.2) On mesure 1 période entre $t = 1,6$ ms et $t' = 4,8$ ms soit $T = 3,2$ ms. La fréquence est donc $f = 1/T = 3,1 \times 10^2$ Hz.

Vérifions que les harmoniques du spectre sont à des fréquences multiples de cette valeur. Visuellement, elles sont régulièrement espacées ce qui confirme la proportionnalité. Pour la valeur, on considère par exemple l'harmonique de rang 4 à la fréquence $f_4 = 1300$ Hz : $f_4/4 = 325$ Hz qui est proche de la fréquence mesurée, ce qui confirme l'adéquation du spectre avec le signal.

Il s'agit de la corde de Mi aigu, mais désaccordée, car la fréquence est légèrement inférieure à sa valeur théorique.

II.3) Il y a plusieurs harmoniques dans le spectre car le signal n'est pas sinusoïdal.

Partie B. Premier filtre

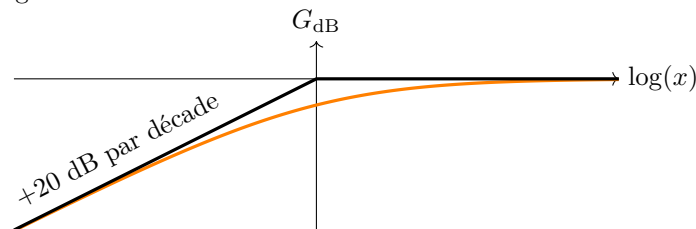
II.4) On se place en notation complexe et on remplace les dipôles par leur impédance. On utilise alors la relation du

diviseur de tension : $\underline{H}_1(j\omega) = \frac{u_1}{u_e} = \frac{\underline{Z}_{R_1}}{\underline{Z}_{R_1} + \underline{Z}_{C_1}} = \frac{R_1}{R_1 + 1/(j\omega C_1)}$ soit $\underline{H}_1(j\omega) = \frac{j\omega R_1 C_1}{1 + j\omega R_1 C_1}$.

II.5) On note $\omega_1 = \frac{1}{R_1 C_1}$. En posant $x = \omega/\omega_1$, la fonction de transfert s'écrit : $\underline{H}_1(jx) = \frac{jx}{1 + jx}$.

Il s'agit d'un filtre passe-haut. Le gain maximal vaut 1 quand $\omega \rightarrow \infty$ soit un gain en décibel nul. À la pulsation $\omega = \omega_1$, $x_1 = 1$ et $\underline{H}_1(jx_1) = \frac{j}{1 + j}$ d'où un gain (en amplitude) $G_1(x_1) = |\underline{H}_1(jx_1)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et un gain en décibel $G_{1dB}(x_1) = 20 \log(G_1(x_1)) = -3$ dB. ω_1 est donc la pulsation de coupure à -3 dB du filtre.

II.6) Diagramme de Bode du gain



II.7) $f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi R_1 C_1} = 15,9$ Hz ce qui est très faible. Ainsi toutes les fréquences du spectre passent, sauf la composante continue pour laquelle le gain est nul. Le but du filtre est donc d'**éliminer la composante continue**.

Partie C. Deuxième filtre

II.8) La tension étant nulle entre les deux bornes de l'ALI, la tension \underline{e} se retrouve aux bornes de \underline{Z} .

Les courants entrant dans l'ALI étant nuls, les dipôles d'impédances \underline{Z} et \underline{Z}' sont en série et leur association a une tension \underline{s} à ses bornes.

En appliquant la relation du diviseur de tension : $\underline{e} = \frac{\underline{Z}}{\underline{Z} + \underline{Z}'} \underline{s}$ d'où $\underline{H} = \frac{\underline{e}}{\underline{s}} = 1 + \frac{\underline{Z}'}{\underline{Z}}$.

II.9) $\boxed{\underline{H} = 1 + \frac{R'}{R}}$. Le montage est un **amplificateur**.

II.10) Pour une association en parallèle, $\underline{Z}_{eq} = \frac{\underline{Z}_{R_2} \times \underline{Z}_{C_2}}{\underline{Z}_{R_2} + \underline{Z}_{C_2}} = \frac{R_2 \times \frac{1}{C_2 j \omega}}{R_2 + \frac{1}{C_2 j \omega}}$ donc $\boxed{\underline{Z}_{eq} = \frac{R_2}{1 + R_2 C_2 j \omega}}$.

II.11) \underline{Z}_{eq} joue le rôle de \underline{Z}' , et $\underline{Z} = R_3$ d'où $\boxed{\underline{H}_2 = 1 + \frac{R_2/R_3}{1 + R_2 C_2 j \omega}}$.

II.12) $\boxed{G_0 = \frac{R_3}{R_2}}$ et $\boxed{\omega_2 = \frac{1}{R_2 C_2}}$.

II.13) En régime basse fréquence ($\omega \rightarrow 0$), $\boxed{\underline{H}_2 \rightarrow 1 + G_0}$ donc le gain $|\underline{H}_2|$ également.

En régime haute fréquence ($\omega \rightarrow \infty$), $\boxed{\underline{H}_2 \rightarrow 1}$ donc le gain $|\underline{H}_2|$ également.

II.14) $\boxed{f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{1}{2\pi R_2 C_2} = 498 \text{ Hz}}$ et $\boxed{G_0 = 113}$.

Ce filtre permet d'amplifier fortement (plus de 100 fois) les faibles fréquences, notamment le fondamental, sans toucher aux harmoniques de fréquences plus élevées.

Partie D. Troisième filtre

II.15) Ce filtre correspond à un filtre passe-bande d'ordre 2 (car les pentes des asymptotes sont $\pm 20 \text{ dB/décade}$). La fréquence centrale caractéristique est $f_0 \approx 330 \text{ Hz}$ par lecture graphique. On peut supposer qu'il s'agit en réalité de $329,6 \text{ Hz}$ correspondant à la fréquence du Mi aigu.

II.16) La bande passante est l'intervalle de fréquence pour lesquelles le gain $G_{\text{dB}} > G_{\text{dB, max}} - 3 \text{ dB}$. Graphiquement, on lit les fréquences de coupure : $f_{c1} \approx 320 \text{ Hz}$ et $f_{c2} \approx 340 \text{ Hz}$, la bande passante est donc : $\boxed{[320 \text{ Hz}; 340 \text{ Hz}]}$.

II.17) Un quadripôle possible est un circuit RLC série, avec sortie aux bornes de R.

La fonction de transfert est $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\left(\omega \frac{L}{R} - \frac{1}{\omega RC}\right)}$, caractéristique d'un filtre passe-bande du deuxième ordre.

Le gain en amplitude vaut $G(\omega) = |\underline{H}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\omega \frac{L}{R} - \frac{1}{\omega RC}\right)^2}}$.

Il est maximal avec la valeur $G_{\text{max}} = 1$ lorsque $\omega \frac{L}{R} - \frac{1}{\omega RC} = 0$ c'est-à-dire pour la pulsation propre : $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Les pulsations de coupure sont telles que $G(\omega_c) = G_{\text{max}}/\sqrt{2}$ c'est-à-dire $\omega_c \frac{L}{R} - \frac{1}{\omega_c RC} = \pm 1$. En posant $C = 1/(L\omega_0^2)$ on en déduit $\omega_c^2 \pm (R/L)\omega_c - \omega_0^2 = 0$. La solution positive avec le signe + est $\omega_{c1} = -(R/2L) + \sqrt{(R/2L)^2 + \omega_0^2}$ et celle avec le signe - est $\omega_{c2} = +(R/2L) + \sqrt{(R/2L)^2 + \omega_0^2}$. L'écart entre les deux est $\omega_{c2} - \omega_{c1} = R/L$.

Si on choisit $\boxed{L = 0,2 \text{ H}}$ on a $\boxed{R = L \times 2\pi(f_{c2} - f_{c1}) = 25 \Omega}$ et $\boxed{C = \frac{1}{L(2\pi f_0)^2} = 1,2 \mu\text{F}}$.

II.18) Pour $f = 315 \text{ Hz}$, on lit $G_{\text{dB}} = -6 \text{ dB}$ ce qui correspond à un gain en amplitude $\boxed{G = 10^{G_{\text{dB}}/20} = 0,50}$.

La composante spectrale fondamentale est atténuée d'un facteur 2.

Partie E. Analyse spectrale

II.19) En sortie du premier filtre, seule la composante continue sera supprimée, le reste du spectre n'étant pas modifié. Il s'agit donc du **spectre 1**.

II.20) Le deuxième filtre amplifie les premières harmoniques, d'un facteur environ 100 pour le fondamental, ce qui donne un peu de 1800 mV environ, et pas du tout les harmoniques de rang élevé, ce qui correspond au **spectre 4**.

II.21) Le troisième filtre atténue d'un facteur 2 le fondamental de fréquence $f_{co} = 315$ Hz et atténue bien plus fortement les harmoniques suivants qui disparaissent quasiment du spectre. Le signal temporel sera quasi-sinusoidal, d'amplitude 900 mV, et de période $T = 1/f_{co} = 3,17$ ms.

