Fiche 37 : TD du 8-01-2026.

Exercice 1 : Vrai-Faux

Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors $u_n \leq \ell$ quelque soit $n \in \mathbb{N}$.
2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} > \ell$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers ℓ.
3. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique non-nulle de raison $q \neq 0$, alors $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{q}$.
4. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite à termes positifs convergeant vers 0. Alors, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir d'un certain rang.
5. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est croissante et que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier n, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
6. Toute suite réelle non-majorée tend vers $+\infty$.

Exercice 2

On note f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 1 + \ln(x)$.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par son premier terme $u_0 \geq 1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que l'intervalle $[1, \infty[$ est stable par f et en déduire que la suite la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et qu'elle est minorée par 1.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, convergente et donner sa limite.

Exercice 3

Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} \text{ et } v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}.$$

1. Montrer que $n \in \mathbb{N}^*$ alors :
$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$$
2. Calculer $\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n)$.
3. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont monotones.
4. En déduire que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers la même limite ℓ avec $\ell \leq -1$.
5. Quelle est la limite de $\frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}}{2\sqrt{n}}$?

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - x^2$, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in]0, 1[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Étudier les variations de f. En déduire que $]0, 1[$ est un intervalle stable pour la fonction f.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$0 < u_n < \frac{1}{n+1}$$
En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Montrer que la suite $(v_n = nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (*On rappelle que* $u_{n+1} = u_n - u_n^2$) et admet une limite l appartenant à $]0, 1]$ (on ne demande pas de calculer l pour le moment).
4. On montre dans cette section que $l = 1$ par l'absurde. On suppose donc que $l \in]0, 1[$.
On pose, pour $n \in \mathbb{N}$: $w_n = n(v_{n+1} - v_n)$.
   (a) Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l(1 - l)$ (*On rappelle encore que* $u_{n+1} = u_n - u_n^2$) puis qu'il existe $a > 0$ et $n_0 \geq 1$ vérifiant que, pour $n \geq n_0$, on a :
$$v_{n+1} - v_n \geq \frac{a}{n},$$
   (b) Montrer que pour $n \geq n_0$: $v_{2n} - v_n \geq \frac{a}{2}$, puis en déduire une contradiction.