Chapitre P9

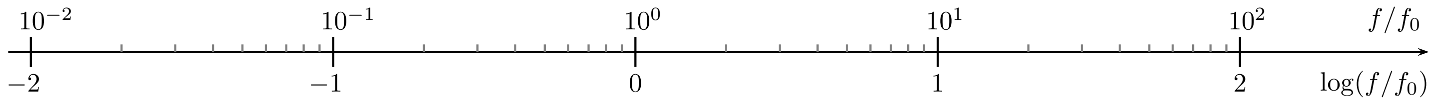
Filtrage linéaire

Notions et contenus	**Capacités exigibles**
Signaux périodiques.	Analyser la décomposition fournie d'un signal périodique en une somme de fonctions sinusoïdales. Définir la valeur moyenne et la valeur efficace d'un signal. Établir par le calcul la valeur efficace d'un signal sinusoïdal. Interpréter le fait que le carré de la valeur efficace d'un signal périodique est égal à la somme des carrés des valeurs efficaces de ses harmoniques.
Fonction de transfert harmonique. Diagramme de Bode.	Tracer le diagramme de Bode (amplitude et phase) associé à une fonction de transfert d'ordre 1. Utiliser une fonction de transfert donnée d'ordre 1 ou 2 (ou ses représentations graphiques) pour étudier la réponse d'un système linéaire à une excitation sinusoïdale, à une somme finie d'excitations sinusoïdales, à un signal périodique. Utiliser les échelles logarithmiques et interpréter les zones rectilignes des diagrammes de Bode en amplitude d'après l'expression de la fonction de transfert. *Capacité expérimentale : mettre en uvre un dispositif expérimental illustrant l'utilité des fonctions de transfert pour un système linéaire à un ou plusieurs étages.*
Modèles de filtres passifs : passe-bas et passe- haut d'ordre 1, passe-bas et passe-bande d'ordre 2.	Choisir un modèle de filtre en fonction d'un cahier des charges. Expliciter les conditions d'utilisation d'un filtre en tant que moyenneur, intégrateur, ou dérivateur. Expliquer l'intérêt, pour garantir leur fonctionnement lors de mises en cascade, de réaliser des filtres de tension de faible impédance de sortie et forte impédance d'entrée. Expliquer la nature du filtrage introduit par un dispositif mécanique (sismomètre, amortisseur, accéléromètre, etc.). *Capacité expérimentale : étudier le filtrage linéaire d'un signal non sinusoïdal à partir d'une analyse spectrale.* *Capacité expérimentale : détecter le caractère non linéaire d'un système par l'apparition de nouvelles fréquences.* *Capacité numérique : simuler, à l'aide d'un langage de programmation, l'action d'un filtre sur un signal périodique dont le spectre est fourni. Mettre en évidence l'influence des caractéristiques du filtre sur l'opération de filtrage.*

Questions de cours

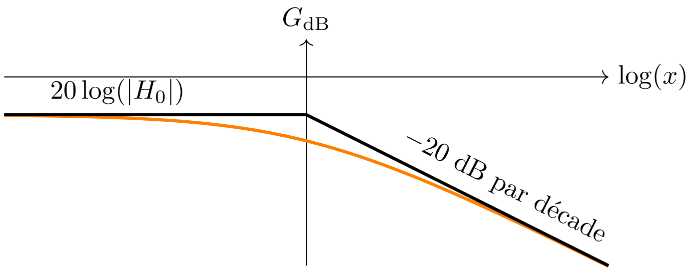
- Écrire la décomposition de Fourier d'un signal périodique quelconque et faire le lien avec le spectre en fréquence de ce signal.
- Définir la valeur moyenne et la valeur efficace d'un signal périodique.
- Établir par le calcul la valeur efficace d'un signal sinusoïdal.
- Expliquer comment on détermine le résultat de l'action d'un filtre linéaire sur un signal périodique dont on connait la décomposition de Fourier.
- Expliciter les conditions d'utilisation d'un filtre en tant que moyenneur, intégrateur, ou dérivateur.
- Définir la fonction de transfert d'un filtre linéaire, ainsi que le gain en décibel et la phase du filtre associé.
- Caractériser le comportement asymptotique en basses et hautes fréquences d'un condensateur et d'une bobine idéale.
- Représenter le filtre RC, établir sa fonction de transfert et tracer son diagramme de Bode asymptotique.

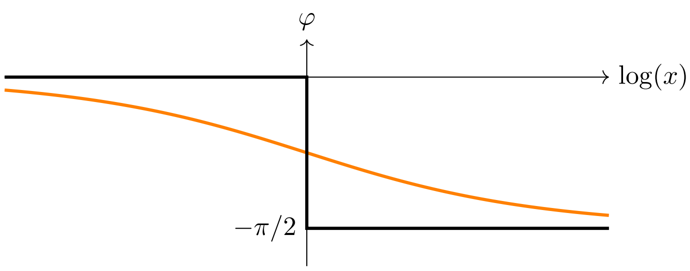
Document 1. Echelle logarithmique

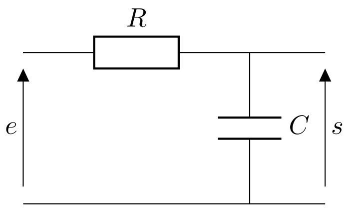


Document 2. Filtre passe-bas du premier ordre

$\boxed{\underline{H} = \dfrac{H_0}{1 + jx}}$ avec $x = \dfrac{f}{f_c} = \dfrac{\omega}{\omega_c}$ où f_c (resp. ω_c) est la fréquence (resp. pulsation) de coupure



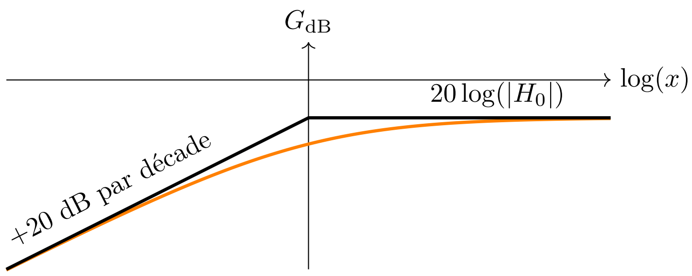


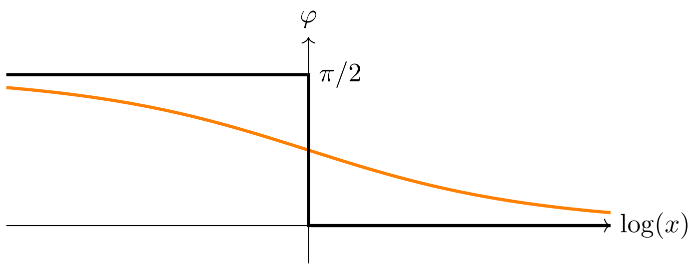


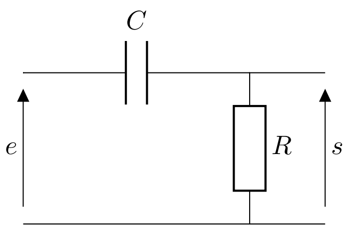
$$\begin{cases} H_0 & = 1 \\ \omega_c & = \dfrac{1}{RC} \end{cases}$$

Document 3. Filtre passe-haut du premier ordre

$\boxed{\underline{H} = \dfrac{H_0 jx}{1 + jx}}$ avec $x = \dfrac{f}{f_c} = \dfrac{\omega}{\omega_c}$ où f_c (resp. ω_c) est la fréquence (resp. pulsation) de coupure



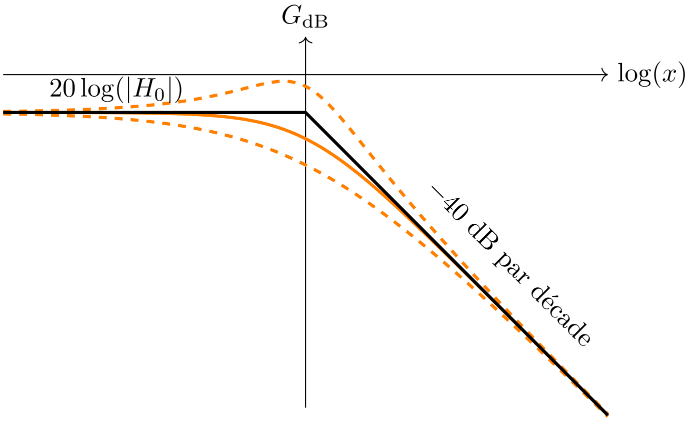


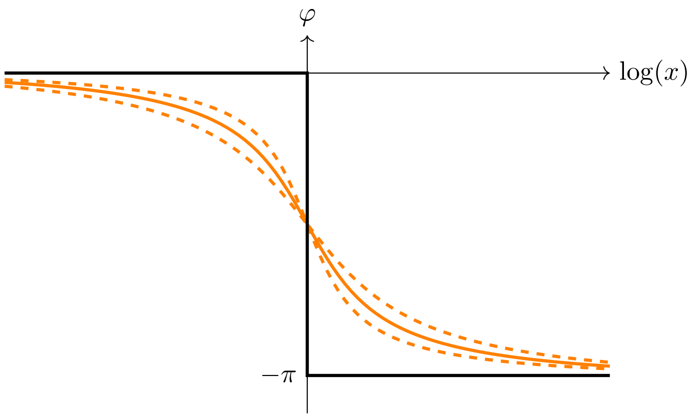


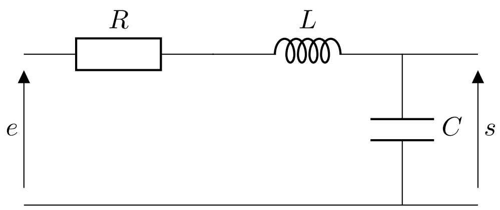
$$\begin{cases} H_0 & = 1 \\ \omega_c & = \dfrac{1}{RC} \end{cases}$$

Document 4. Filtre passe-bas du deuxième ordre

$$\boxed{\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jx/Q - x^2}} \quad \text{avec} \quad x = \frac{f}{f_0} = \frac{\omega}{\omega_0} \quad \text{où} \quad \begin{cases} f_0 & \text{(resp. } \omega_0\text{) est la fréquence (resp. pulsation) propre} \\ Q & \text{est le facteur de qualité du circuit} \end{cases}$$



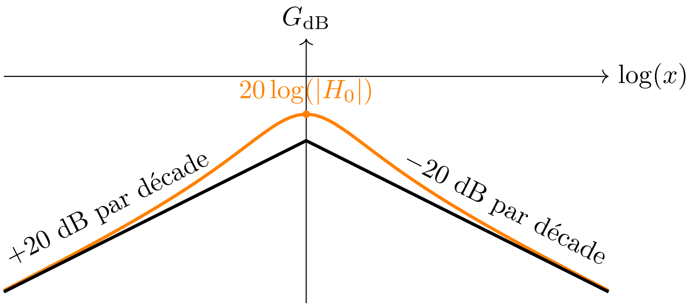


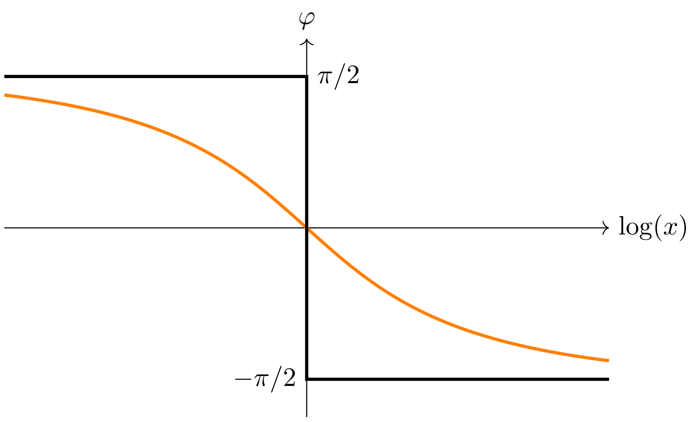


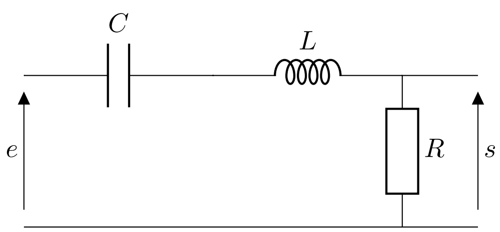
$$\begin{cases} H_0 & = 1 \\ \omega_0 & = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} \\ Q & = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}} \end{cases}$$

Document 5. Filtre passe-bande du deuxième ordre

$$\boxed{\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jQ(x - 1/x)}} \quad \text{avec} \quad x = \frac{f}{f_0} = \frac{\omega}{\omega_0} \quad \text{où} \quad \begin{cases} f_0 & \text{(resp. } \omega_0\text{) est la fréquence (resp. pulsation) propre} \\ Q & \text{est le facteur de qualité du circuit} \end{cases}$$



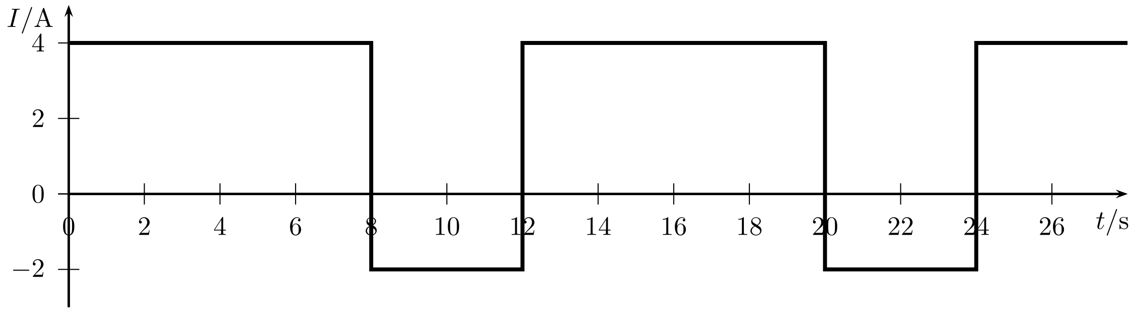




$$\begin{cases} H_0 & = 1 \\ \omega_0 & = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} \\ Q & = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}} \end{cases}$$

Exercice de cours A. Valeur moyenne et valeur efficace

Le signal ci-dessous est une consigne de courant délivré par un générateur (en alternance $-2\,\mathrm{A}$ et $4\,\mathrm{A}$).



1. Déterminer la période du signal.
2. Calculer sa valeur moyenne et sa valeur efficace.

Exercice de cours B. Action d'un filtre caractérisé par sa fonction de transfert

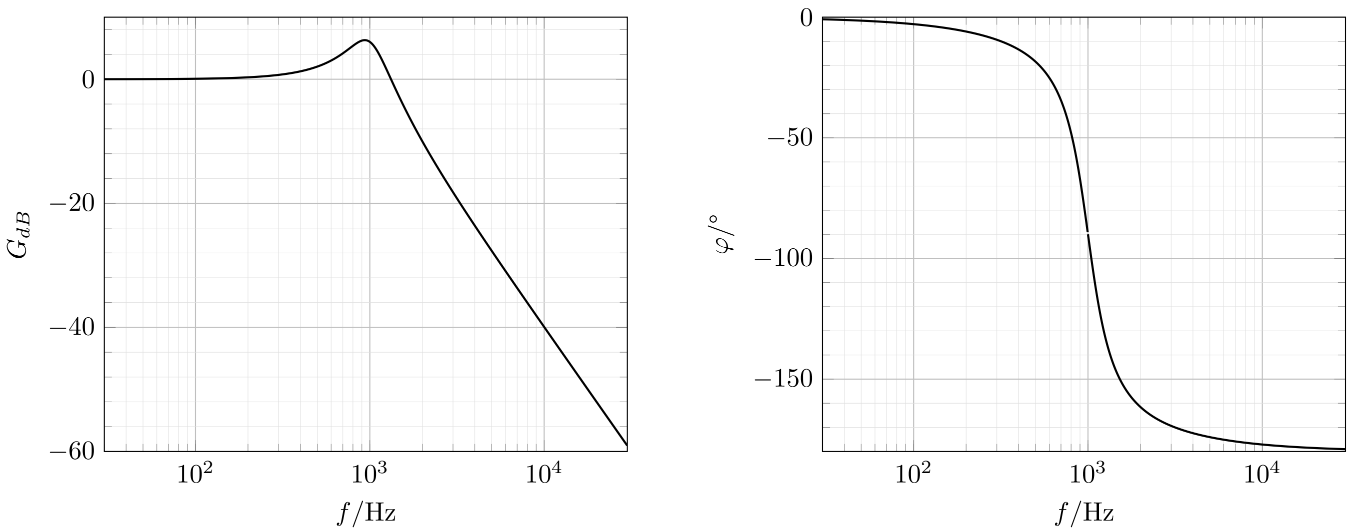
On dispose d'un filtre dont la fonction de transfert est : $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{1}{1 + j\omega\tau}$.

On fait agir ce filtre sur le signal (dans une unité arbitraire) : $e(t) = 1 + \cos(t/\tau - \pi/2) + \cos(\sqrt{3}t/\tau)$.

1. Donner l'expression du gain en amplitude et de la phase du filtre, en fonction de la pulsation.
2. Déterminer leurs valeurs pour les pulsations présentes dans le signal d'entrée.
3. En déduire le signal de sortie.

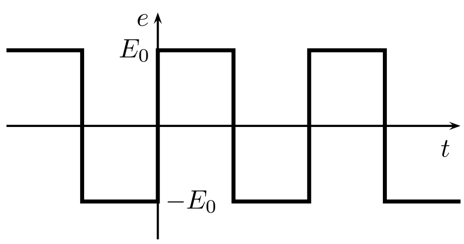
Exercice de cours C. Action d'un filtre caractérisé par son diagramme de Bode

On dispose d'un filtre ayant le diagramme de Bode suivant :



On fait agir ce filtre sur un signal carré d'amplitude E_0 et de fréquence f, dont la décomposition de Fourier est :

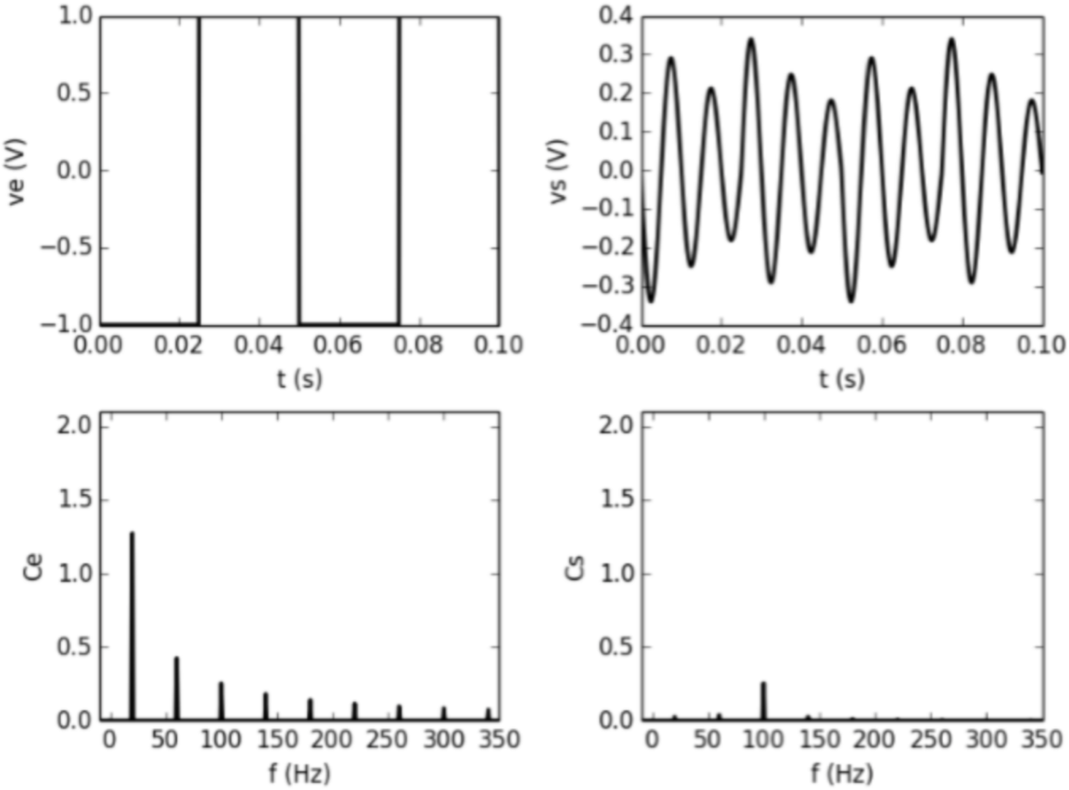
$$e(t) = \frac{4E_0}{\pi} \sum_{k \text{ impair}} \frac{1}{k} \sin(2\pi k f t) = \frac{4E_0}{\pi} \left[\sin(2\pi f t) + \frac{1}{3}\sin(6\pi f t) + \frac{1}{5}\sin(10\pi f t) + \frac{1}{7}\sin(14\pi f t) + \dots \right]$$



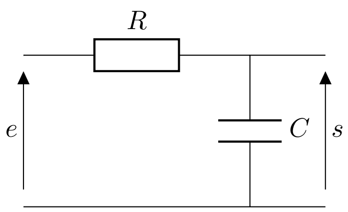
1. Déterminer le signal en sortie du filtre pour $E_0 = 1\,\mathrm{V}$ et $f = 10\,\mathrm{Hz}$.
2. Même question pour $E_0 = 1\,\mathrm{V}$ et $f = 1{,}0\,\mathrm{kHz}$.

Exercice de cours D. Filtrage d'un signal créneau

On a un filtre inconnu dans une boîte noire. On applique en entrée un signal créneau, dont on donne le spectre. En sortie du signal, on obtient un signal, dont on donne également le spectre. Quelle est la nature du filtre et quelles sont ses caractéristiques ?



Exercice de cours E. Filtre *RC*

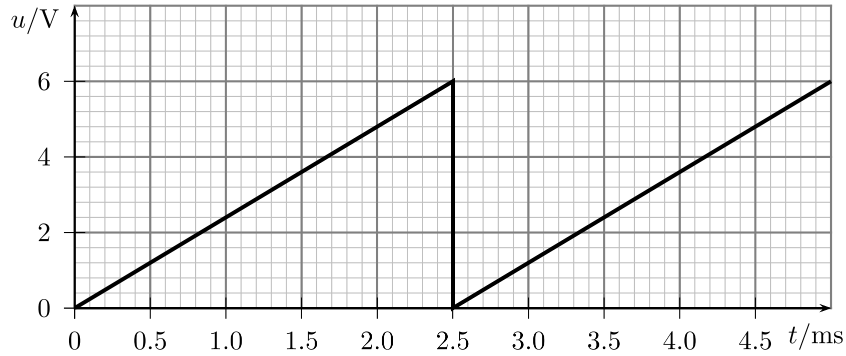


On étudie le quadripôle ci-dessus.

1. Caractériser sans calcul le filtre opéré par ce quadripôle.
2. Exprimer sa fonction de transfert.
3. Donner son expression asymptotique à basse et haute fréquence. Comment se comporte-t-il dans ces deux régimes ?
4. En déduire les expressions asymtotiques du gain en décibel et de la phase. Déterminer l'intersection des asymptotes du gain.
5. Tracer le diagramme de Bode asymptotique.
6. Déterminer la pulsation de coupure à $-3\,\mathrm{dB}$.
7. Compléter le diagramme de Bode en gain à la main avec des courbes réelles.

Exercice 1. Signal en dents de scie

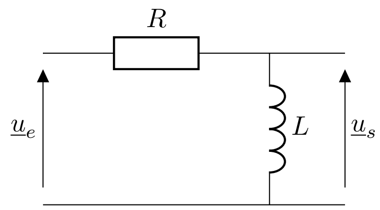
Un générateur émet le signal périodique suivant :



1. Déterminer la valeur moyenne du signal.
2. Déterminer la valeur efficace du signal.

Exercice 2. Filtre *RL*

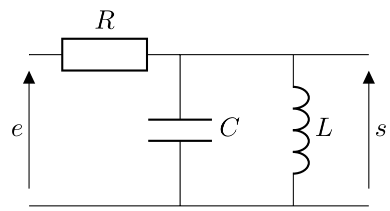
Soit le filtre RL ci-dessous, avec $R = 100\,\Omega$ et $L = 200\,\mathrm{mH}$.



1. Déterminer sans calcul la nature du filtre.
2. Déterminer la fonction de transfert du circuit.
3. Déterminer la fréquence de coupure.
4. Tracer son diagramme de Bode asymptotique.
5. Soit $u_e(t) = U_0(1 + \cos(2\pi f t))$ où U_0 est une tension constante et $f = 20\,\mathrm{kHz}$. Déterminer $u_s(t)$.

Exercice 3. Étude d'un filtre

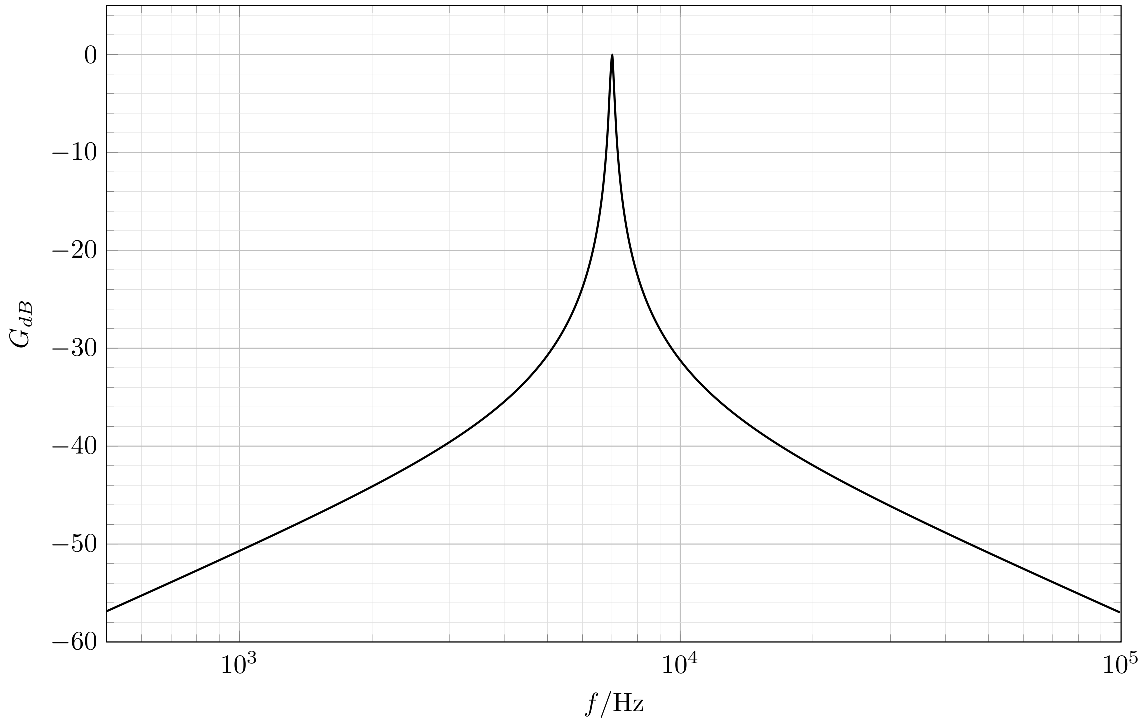
On étudie le montage ci-dessous (en sortie ouverte).



1. Déterminer sans calcul la nature du filtre.
2. Déterminer sa fonction de transfert.
3. Déterminer les asymptotes du diagramme de Bode (gain en dB et phase).

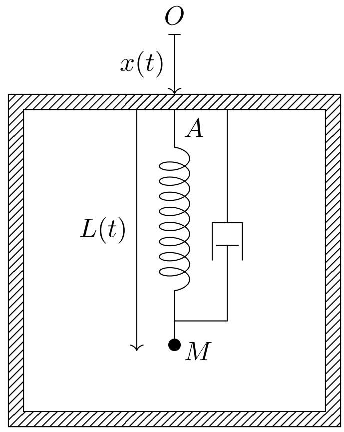
Le diagramme de Bode en gain du filtre est donné ci-dessous.

4. La pente des asymptotes est-elle conforme aux prédictions ?
5. En exploitant les coordonnées de l'intersection des asymptotes du diagramme de Bode pour le gain, déterminer les valeurs de L et C connaissant $R = 10\,\mathrm{k}\Omega$.
6. Ce quadripôle peut-il servir d'intégrateur ou de dérivateur ? Si oui, dans quelles bandes de fréquence ? Quel inconvénient présente néanmoins ce montage utilisé pour réaliser ces opérations ? Quel est son utilisation probable ?



Exercice 4. Sismomètre

Le principe d'un sismomètre vertical est schématisé ci-contre. Il est constitué d'un point matériel M de masse m, relié à un point A d'un châssis lui-même solidaire du sol. La liaison de M au châssis est modélisée par un ressort de longueur $L(t)$ à l'instant t, de longueur au repos L_0 , et de constante de raideur k, associé à un amortisseur exerçant sur le point matériel une force de frottement fluide de coefficient α : $\vec{f} = -\alpha \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{AM}}{\mathrm{d}t}$.



Suite à un séisme, le sol subit localement des vibrations dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}$ supposé galiléen. On note $x(t)$ la composante verticale descendante du mouvement du boîtier relativement au point O fixe dans le référentiel $\mathcal{R}$.

1. Déterminer la longeur L_{eq} de L à l'équilibre en l'absence de tremblement de terre (c'est-à-dire $x(t) = 0$).

Au passage d'une onde sismique, le boîtier se met en mouvement. Pour tenir compte du caractère non galiléen du référentiel lié au chassis, on admet que, dans l'application du principe fondamental de la dynamique dans le référentiel lié au chassis, il est nécessaire d'introduire une force supplémentaire, nommée force d'inertie d'entrainement, d'expression $\vec{f_{ie}} = -m \dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OA}}{\mathrm{d}t^2}$.

2. Établir l'équation du mouvement vérifiée par $z(t) = L(t) - L_{eq}$. Montrer qu'elle se met sous la forme :

$$\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{z} + \omega_0^2 z = -\ddot{x}$$

   où l'on exprimera ω_0 et Q en fonction des données.

On considère une onde sismique sinusoïdale et de pulsation ω : $x(t) = x_m \cos(\omega t)$. On se place en régime sinusoïdal forcé et on utilise la représentation complexe des signaux sinusoïdaux.

3. Établir l'expression de la fonction de transfert mécanique $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{\underline{z}}{\underline{x}}$. Caractériser la nature du filtrage réalisée par le sismomètre.
4. Tracer le diagramme de Bode asymptotique en gain et en phase.
5. On veut que le sismographe suive au plus près les mouvements sismiques verticaux du lieu où on l'a placé. Comment doit-on choisir la pulsation propre ω_0 par rapport à lordre de grandeur ω de la pulsation imposée par le séisme ?
6. On règle l'amortisseur de sorte que $Q \approx \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Quel est en l'intérêt ? Ce choix est-il compatible avec une disparition rapide du régime transitoire ?

Exercice 5. Radio AM

Pour transmettre un signal sonore $s(t)$, la radio utilise une porteuse : c'est un signal sinusoïdal $s_p(t) = P_m \cos(2\pi f_0 t)$ de haute fréquence f_0 qui est modulé par le signal à transmettre. Pour la bande « grandes ondes » (f_0 de l'ordre de quelques centaines de kHz), on effectue une modulation d'amplitude (AM) : l'amplitude de la porteuse varie comme le signal à transmettre.

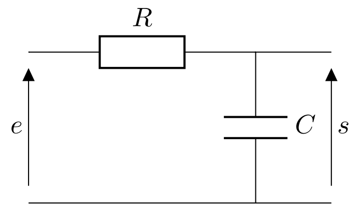
Concrètement, on construit à l'aide d'un circuit électrique le signal modulé : $s_m(t) = (1 + \alpha s(t)) \times s_p(t)$, où α est une constante. Le signal modulé est ensuite transmis par voie aérienne.

On considère dans la suite un signal sonore sinusoïdal : $s(t) = S_m \cos(2\pi f t + \varphi)$. La constante α est telle que $\alpha S_m \ll 1$.

1. Comparer les ordres de grandeur des fréquences f et f_0. Tracer l'allure qualitative de $s_m(t)$.
2. En utilisant une identité remarquable trigonométrique, écrire la décomposition de Fourier du signal modulé. Tracer son spectre.
3. Sachant que la législation limite les valeurs de f à $f_{\text{max}} = 9\,\text{kHz}$, quel est l'intervalle de fréquence minimal séparant deux stations de radio afin de leurs spectres ne se chevauchent pas ?
4. Quel type de filtre un récepteur radio doit-il utiliser pour isoler le signal d'une station unique ? Comment peut-on alors sélectionner la station que l'on veut ?
5. Une fois le signal modulé réceptionné, on le multiplie par un signal de même fréquence que la porteuse grâce à un multiplieur qui délivre le signal $u(t) = K s_m(t) \cos(2\pi f_0 t + \Psi)$ avec K une constante. Écrire sa décomposition de Fourier.
6. Quel filtre faut-il alors appliquer pour obtenir le signal sonore original ?

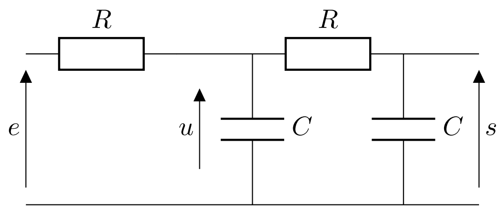
Exercice 6. Filtres *RC* en cascade

Soit le filtre RC, dont on rappelle la fonction de transfert : $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{1}{1 + j\omega RC}$.



1. Déterminer son impédance d'entrée (en sortie ouverte).
2. Déterminer son impédance de sortie (en posant $e = 0$).
3. À quelle condition sur ω, l'impédance d'entrée est-elle très supérieure à l'impédance de sortie ?

On place deux de ces filtres en cascade :



4. Exprimer l'impédance du dipôle aux bornes de u. En déduire $\dfrac{\underline{u}}{\underline{e}}$.
5. Déterminer la fonction de transfert du filtre complet $\underline{H} = \dfrac{\underline{s}}{\underline{e}}$. Caractériser le filtre.
6. Montrer que lorsque la condition obtenue à la question 3 est vérifiée, cette fonction de transfert est égale au produit des fonctions de transfert des deux filtres RC.

Réponses

Exercice 1 : 1. $U_{\text{moy}} = 3{,}0\,\text{V}$; $U_{\text{eff}} = 3{,}5\,\text{V}$.

Exercice 2 : 1. passe-haut ; 3. $f_c = 80\,\text{Hz}$.

Exercice 3 : 1. passe-bande ; 5. $L = 4{,}5\,\text{mH}$; $C = 0{,}12\,\mu\text{F}$.

Exercice 4 : 1. $L_{eq} = L_0 + \dfrac{mg}{k}$; 2. $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$; $Q = \dfrac{\sqrt{km}}{\alpha}$; 3. $\underline{H} = 1/\left(\dfrac{\omega_0^2}{\omega_2} - 1 + j\dfrac{\omega_0}{Q\omega}\right)$.

Exercice 5 : 2. pics en f_0 et $f_0 \pm f$; 4. passe-bande ; 5. composante continue + 4 pics (f, $2f_0$, $2f_0 \pm f$).

Exercice 6 : 1. $\underline{Z}_e = \dfrac{1 + jRC\omega}{jC\omega}$; 2. $\underline{Z}_s = \dfrac{R}{1 + jRC\omega}$; 5. $\underline{H} = \dfrac{1}{1 + 3jRC\omega - (RC\omega)^2}$.