Exercice 1. Signal en dents de scie

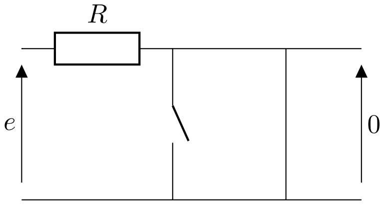
1. Sur une période $T = 2{,}5\,\text{ms}$, le signal varie linéairement de 0 à $U_{\max} = 6{,}0\,\text{V}$. Son expression est donc $u(t) = U_{\max} \times t/T$ sur l'intervalle $[0, T]$.
   On calcule sa valeur moyenne :
   $$U_{\text{moy}} = < u(t) > = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\text{d}t = \frac{U_{\max}}{T^2}\int_0^T t\text{d}t = \frac{U_{\max}}{T^2} \times \frac{T^2}{2} = U_{\max}/2 = \underline{3{,}0\,\text{V}}$$
2. Valeur efficace :
   $$U_{\text{eff}} = \sqrt{< u^2(t) >} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\text{d}t} = \sqrt{\frac{U_{\max}^2}{T^3}\int_0^T t^2\text{d}t}$$
   $$= \sqrt{\frac{U_{\max}^2}{T^3} \times \frac{T^3}{3}} = \sqrt{U_{\max}^2/3} = U_{\max}/\sqrt{3} = \underline{3{,}5\,\text{V}}$$

Exercice 2. Filtre *RL*

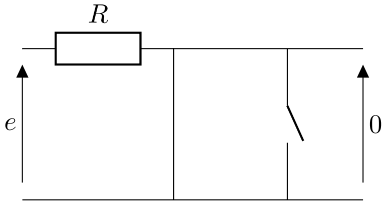
1. En basse fréquence, la bobine est équivalente à un fil, donc $\underline{u}_s = 0$.
   En haute fréquence, la bobine est équivalente à un interrupteur ouvert. En sortie ouverte, on a $\underline{u}_s = \underline{u}_e$.
   Le filtre élimine les basses fréquences en laissant passer les hautes fréquences : c'est probablement un filtre <u>passe-haut</u>.
2. En utilisant la relation du diviseur de tension, $\underline{H} = \dfrac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \dfrac{jL\omega}{R + jL\omega} = \dfrac{j(L/R)\omega}{1 + j(L/R)\omega}$.
   En posant $\boxed{\tau = L/R} = \underline{2\,\text{ms}}$ le temps caractéristique du circuit, on obtient la fonction de transfert sous forme canonique : $\boxed{\underline{H} = \dfrac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau}}$.
3. L'amplification vaut $H = |\underline{H}| = \dfrac{\omega\tau}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$. Elle est maximale pour $\omega \to \infty$: $H_{max} = 1$. A la pulsation de coupure ω_c elle est divisée par $\sqrt{2}$: $H(\omega_c) = H_{max}/\sqrt{2}$ soit $\dfrac{\omega_c\tau}{\sqrt{1 + (\omega_c\tau)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. En prenant le carré il vient $1 + (\omega_c\tau)^2 = 2(\omega_c\tau)^2$ si bien que $\omega_c\tau = 1$ soit $\omega_c = 1/\tau$. La fréquence de coupure vaut $\boxed{f_c = 1/(2\pi\tau)} = \underline{80\,\text{Hz}}$.
4. Diagramme de Bode d'un passe-haut du premier ordre, le gain HF valant $G_{\text{dB}} = 0\,\text{dB}$.
5. La composante sinusoïdale est de fréquence très élevée par rapport à la fréquence de coupure (2 décades environ), donc elle va passer sans atténuation ni déphasage.
   Pour la composante continue, $\omega = 0$ donc $H = 0$: elle est complètement éliminée.
   En conclusion, $u_s(t) = U_0\cos(2\pi f t)$.

Exercice 3. Étude d'un filtre

1. Le filtre ne laisse passer ni les basses ni les hautes fréquences : c'est probablement un passe-bande.



BF



HF

2. $\underline{H} = \dfrac{\underline{s}}{\underline{e}} = \dfrac{\underline{Z}_{LC}}{\underline{Z}_{LC} + R}$ où $\underline{Z}_{LC}$ est l'impédance du dipôle LC-parallèle :
   $$\underline{Z}_{LC} = \frac{\underline{Z}_L \times \underline{Z}_C}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_C} = \frac{L/C}{jL\omega + 1/(jC\omega)} = \frac{jL\omega}{1 - LC\omega^2}$$
   Il vient $\boxed{\underline{H} = \dfrac{jL\omega}{jL\omega + R(1 - LC\omega^2)} = \dfrac{j(L/R)\omega}{1 + j(L/R)\omega - LC\omega^2}}$ (passe-bande du deuxième ordre).
3. Limite BF : $\underline{H}_{\text{BF}} \sim j(L/R)\omega$ donc $G_{\text{dB,BF}} = 20\log((L/R)\omega)$ (pente à 20 dB par décade) et $\varphi_{\text{BF}} = \pi/2$.
   Limite HF : $\underline{H}_{\text{HF}} \sim -j/(RC\omega)$ donc $G_{\text{dB,HF}} = -20\log(RC\omega)$ (pente à - 20 dB par décade) et $\varphi_{\text{HF}} = -\pi/2$.
4. On mesure effectivement une asymptote de pente 20 dB/décade en BF de pente -20 dB/décade en HF.
5. L'intersection des asymptotes du gain en dB se fait à une pulsation telle que : $20\log((L/R)\omega) = -20\log(RC\omega)$ soit $0 = 20\log((L/R)\omega) + 20\log(RC\omega) = 20\log((L/R)\omega \times RC\omega) = 20\log(LCw^2)$. Les coordonnées de cette intersection sont donc $\omega_i = 1/\sqrt{LC}$ et $G_{\text{dB},i} = 20\log\left(\dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}\right)$.
   Graphiquement on lit $f_i = 7\,\text{kHz}$ et $G_{\text{dB},i} = -34\,\text{dB}$ donc :
   - $\omega_i = 2\pi f_i = 4{,}4 \times 10^4\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ d'où $\sqrt{LC} = 1/\omega_i = 2{,}3 \times 10^{-5}\,\text{s}$.
   - $\dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}} = 10^{G_{\text{dB},i}/20} = 2{,}0 \times 10^{-2}$ d'où $\sqrt{\dfrac{L}{C}} = 2{,}0 \times 10^2\,\Omega$.

   On en déduit $\boxed{L = \sqrt{LC} \times \sqrt{\dfrac{L}{C}} = 4{,}5\,\text{mH}}$ et $\boxed{C = \sqrt{LC} \div \sqrt{\dfrac{L}{C}} = 0{,}12\,\mu\text{F}}$.

6. Ce quadripôle peut servir d'intégrateur en HF (fréquences très supérieures à la fréquence propre) car $\underline{H} \sim 1/(j\omega)$ et de dérivateur en BF (fréquences très inférieures à la fréquence propre) car $\underline{H} \sim j\omega$.

   Cependant l'atténuation de ce filtre est très importante dans ces régimes, ce qui limite son utilité.Il sert plutôt de filtre sélectif qui ne conserve que les fréquences proches de 11 kHz.

Exercice 4. Sismomètre

1. On étudie le système {point matériel M de masse m} dans le référentiel du châssis, muni du repère $(A; \vec{e}_x)$ avec $\vec{e}_x$ vertical descendant. Ce référentiel est galiléen en l'absence de tremblement de terre, car A est immobile par rapport à O fixe dans le référentiel terrestre galiléen.

   À l'équilibre, les seules forces extérieures exercées sont le poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{e}_x$ et la force de rappel du ressort $\vec{F} = -k(L - L_0)\vec{e}_x$. D'après la deuxième loi de Newton, $\vec{P} + \vec{F} = m\vec{a}_M = \vec{0}$ à l'équilibre.

   En projetant sur $\vec{e}_x$ il vient $\boxed{L_{eq} = L_0 + \dfrac{mg}{k}}$.

2. Le mouvement de M dans le référentiel du châssis est décrit par le vecteur position $\overrightarrow{AM} = L(t)\vec{e}_x$. Les forces suivantes s'ajoutent :

   — force de frottement fluide : $\vec{f} = -\alpha \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{AM}}{\mathrm{d}t} = -\alpha \dot{L} \vec{e}_x$;

   — force d'inertie d'entraînement due au caractère non-galiléen du référentiel : $\vec{f}_{ie} = -m\dfrac{\mathrm{d}^2 OA}{\mathrm{d}t^2} = -m\ddot{x}\vec{e}_x$.

   La deuxième loi de Newton s'écrit alors : $\vec{P} + \vec{F} + \vec{f} + \vec{f}_{ie} = m\dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{AM}}{\mathrm{d}t^2} = m\ddot{L}\vec{e}_x$.

   En projetant sur $\vec{e}_x$ il vient : $mg - k(L - L_0) - \alpha\dot{L} - m\ddot{x} = m\ddot{L}$.

   On pose $z = L - L_{eq} = L - L_0 - \dfrac{mg}{k}$ alors $mg - k(L - L_0) = -kz$, $\dot{z} = \dot{L}$ et $\ddot{z} = \ddot{L}$.

   L'équation du mouvement se met alors sous la forme : $\ddot{z} + \dfrac{\alpha}{m}\dot{z} + \dfrac{k}{m}z = \ddot{x}$.

   On identifie avec la formule proposée : $\dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{\alpha}{m}$ et $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ d'où $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}}$ et $\boxed{Q = \dfrac{m\omega_0}{\alpha} = \dfrac{\sqrt{km}}{\alpha}}$.

3. Avec les représentations complexes : $-\omega^2\underline{z} + \dfrac{\omega_0}{Q}j\omega\underline{z} + \omega_0^2\underline{z} = +\omega^2\underline{x}$. On en déduit la fonction de transfert :

$$\boxed{\underline{H} = \frac{\underline{z}}{\underline{x}} = \frac{\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\dfrac{\omega}{Q\omega_0}}}$$

   — Dans le régime basse fréquence $\underline{H}_{BF} = \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2} \to 0$;

   — Dans le régime haute fréquence $\underline{H}_{HF} = -1$.

   Il s'agit d'un filtre passe-haut d'ordre 2.

4. Pour le gain en décibel :

   — en basse fréquence, $G_{\mathrm{dB},BF} = 20\log\left(\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) = 40\log\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)$: asymptote de pente 40 dB par décade ;

   — en haute fréquence, $G_{\mathrm{dB},HF} = 20\log(|-1|) = 0$: asymptote horizontale.

   Les asymptotes se croisent en $\omega = \omega_0$.

   Pour la phase :

   — en basse fréquence, $\varphi_{BF} = textarg\left(\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) = 0$;

   — en haute fréquence, $\varphi_{HF} = \arg(-1) = \pm\pi$.

   Pour une pulsation quelconque : $\varphi = \arg(\underline{H}) = -\arg\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\dfrac{\omega}{Q\omega_0}\right)$. Le complexe dont on prend l'argument a une partie imaginaire positive, et se trouve donc dans le cadran supérieur avec une phase comprise entre 0 et π. ϕ est son opposé est donc comprise entre $-\pi$ et 0. On en déduit que l'asymptote en haute fréquence se trouve en $-\pi$.

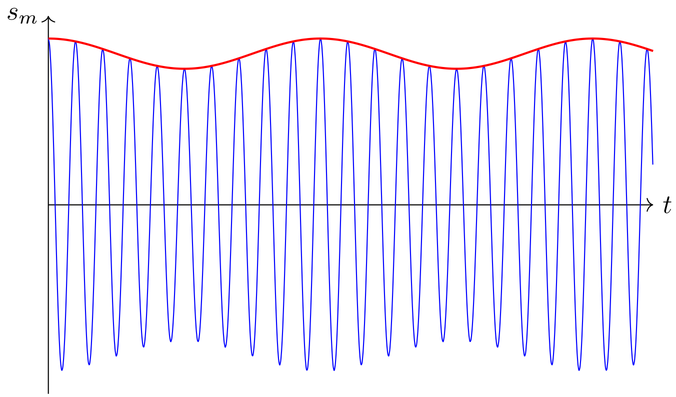
5. On veut que le gain soit de 1 : on se place donc en haute fréquence (le déphasage qui est une simple inversion). Il faut donc que $\omega_0 \ll \omega$.

6. Avec $Q = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ le filtre est non-résonant et avec un gain quasi constant sur toute la bande passante : le signal est reproduit fidèlement.

   Le régime transitoire est pseudo-périodique, de durée caractéristique $\tau = \dfrac{2Q}{\omega_0} = \dfrac{\sqrt{2}}{\omega_0}$ (voir cours du chapitre P3). C'est un facteur $\sqrt{2}$ du temps caractéristique pour le régime critique qui est la plus rapide, c'est donc satisfaisant.
   Cependant si $\omega_0 \ll \omega = 2\pi/T$, alors $\tau \gg T$ (la période des secousses) ce qui empêche de capter les premières secousses de façon fidèle. Ceci est dû à l'inertie du système mécanique.

Exercice 5. Radio AM

1. $f_0 \gg f$ qui est de l'ordre du kHz (voix). Le signal est un signal sinusoïdal de fréquence f_0 (en bleu) dont l'amplitude (en rouge) oscille autour de sa valeur moyenne avec une fréquence f.



2. $s_m(t) = P_m(1 + \alpha S_m \cos(2\pi f t + \varphi))\cos(2\pi f_0 t)$. En utilisant une identité trigonométrique :

$$\begin{aligned} e(t) &= P_m \cos(2\pi f_0 t) + \alpha S_m P_m \cos(2\pi f t + \varphi)\cos(2\pi f_0 t) \\ &= \boxed{P_m \cos(2\pi f_0 t) + \alpha S_m P_m(\cos(2\pi(f_0 + f)t + \varphi) + \cos(2\pi(f_0 - f)t - \varphi))/2} \end{aligned}$$

Le spectre contient donc un pic à la fréquence f_0 d'amplitude P_m entouré de deux pics aux fréquences $f_0 \pm f$ d'amplitude $\alpha P_m S_m/2$.

3. Les signaux émis ont un spectre de largeur $2f_{\max}$ centrés sur la porteuse. Pour qu'ils ne se chevauchent pas, ils faut que deux porteuses soient séparées d'au moins $\underline{2f_{\max} = 18\,\text{kHz}}$.

4. Pour sélectionner un signal, il faut un filtre passe-bande très sélectif, de fréquence de résonance égale à la fréquence de la porteuse et de bande passante de l'ordre de $2f_{\max}$. On choisit la station de radio en réglant la valeur de de la fréquence de résonance.

5. $u(t) = K[P_m \cos(2\pi f_0 t) + (\alpha S_m P_m/2)\cos(2\pi(f_0 + f)t + \varphi) + (\alpha S_m P_m/2)\cos(2\pi(f_0 - f)t - \varphi)]\cos(2\pi f_0 t + \Psi)$. On développe :

$$\begin{aligned} u(t) &= KP_m \cos(2\pi f_0 t)\cos(2\pi f_0 t + \Psi) \\ &\quad + (K\alpha S_m P_m/2)\cos(2\pi(f_0 + f)t + \varphi)\cos(2\pi f_0 t + \Psi) \\ &\quad + (K\alpha S_m P_m/2)\cos(2\pi(f_0 - f)t + \varphi)\cos(2\pi f_0 t + \Psi) \\ &= (KP_m/2)(\cos(4\pi f_0 t) + \cos(\Psi)) \\ &\quad + (K\alpha S_m P_m/4)(\cos(2\pi(2f_0 + f)t + \varphi + \Psi) + \cos(2\pi f t + \varphi - \Psi)) \\ &\quad + (K\alpha S_m P_m/4)(\cos(2\pi(2f_0 - f)t - \varphi + \Psi) + \cos(2\pi f t + \varphi + \Psi)) \\ &= (KP_m/2)\cos(\Psi) + (KkS_m P_m/2)\cos(\Psi)\cos(2\pi f t) + (KP_m/2)\cos(4\pi f_0 t) \\ &\quad + (K\alpha S_m P_m/4)[\cos(2\pi(2f_0 + f)t + \varphi + \Psi) + \cos(2\pi(2f_0 - f)t) - \varphi + \Psi)] \end{aligned}$$

Le spectre contient une composante continue (amplitude $(KP_m/2)\cos(\Psi)$), un petit pic à la fréquence f (amplitude $K\alpha S_m P_m/2$) et un pic à la fréquence $2f_0$ (amplitude $KP_m/2$) entouré par deux petits pics aux fréquence $2f_0 \pm f$ (amplitude $K\alpha S_m P_m/4$).

6. On veut récupérer le signal à fréquence f. Un filte passe-bande n'est pas adapté car son gain dépend de la fréquence. On utilise plutôt deux filtres successifs.
   Il faut tout d'abord éliminer les trois pics autour de la fréquence $2f_0$ qui est très grande par rapport à f. Un filtre passe-bas de fréquence de coupure de l'ordre de 10 kHz convient.
   Il faut ensuite éliminer la composante continue : pour ce faire on utilise un filtre passe-haut avec une faible fréquence de coupure (environ 10 Hz pour ne pas affecter les fréquence sonores).
   Il restera alors $s'(t) = (K\alpha S_m P_m/2)\cos(\Psi)\cos(2\pi f t) = (K\alpha P_m/2)\cos(\Psi)s(t)$. On retrouve le signal de départ, à un facteur constant près.

7. Le filtre passe-bas s'obtient avec un filtre RC par exemple (voir Ex C). La fréquence de coupure est telle que $f_c = \omega_c/(2\pi) = 1/(2\pi RC)$. Il faut donc choisir $RC \simeq 1/(2\pi f_c) = 1{,}6 \times 10^{-5}\,\text{s}$. Par exemple : $R = 80\,\Omega$ et $C = 200\,\text{nF}$ (il faut R faible pour limiter l'impédance de sortie).
   Le filtre passe-haut s'obtient avec un filtre CR (on inverse la place de R et C). La fréquence de coupure est identique, il faut donc choisir $R'C' \simeq 1/(2\pi f'_c) = 1{,}6 \times 10^{-2}\,\text{s}$. Par exemple : $R = 80\,\text{k}\Omega$ et $C = 200\,\text{nF}$ (il faut R grand pour augmenter l'impédance d'entrée).

Exercice 6. Filtres *RC* en cascade

1. Vu de l'amont, le dipôle est une association série d'un conducteur ohmique et d'un condensateur, donc l'impédance d'entrée vaut $\underline{Z}_e = R + \dfrac{1}{jC\omega} = \boxed{\dfrac{1+jRC\omega}{jC\omega}}$.

2. Pour déterminer l'impédance de sortie, on court-circuite les deux bornes d'entrée. Le dipôle vu depuis l'aval est une association parallèle de R et C :

$$\underline{Z}_s = \frac{R \times \dfrac{1}{jC\omega}}{R + \dfrac{1}{jC\omega}} = \boxed{\frac{R}{1+jRC\omega}}$$

3. Il faut $|\underline{Z}_e| \gg |\underline{Z}_s|$ soit $\dfrac{\sqrt{1+(RC\omega)^2}}{C\omega} \gg \dfrac{R}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}}$ ou $(1+(RC\omega)^2) \gg RC\omega$.
   On obtient cette condition à basse fréquence ($\omega RC \ll 1$) et à haute fréquence ($\omega RC \gg 1$).

4. u en fait aux bornes du dipôle constitué du condensateur central en parallèle avec la branche de droite. L'impédance complexe équivalente à ce dipôle est $\underline{Z}_u = \dfrac{(R+1/(jC\omega))/jC\omega}{R+1/(jC\omega)+1/(jC\omega)}$ soit $\boxed{\underline{Z}_u = \dfrac{1+jRC\omega}{(2+jRC\omega)jC\omega}}$.
   Ce dipôle est en série avec la première résistance donc on peut appliquer la relation du diviseur de tension :
   $\dfrac{\underline{u}}{\underline{e}} = \dfrac{\underline{Z}_{eq}}{R+\underline{Z}_{eq}} = \dfrac{1+jRC\omega}{1+jRC\omega+jRC\omega(2+jRC\omega)}$ soit $\boxed{\dfrac{\underline{u}}{\underline{e}} = \dfrac{1+jRC\omega}{1+3jRC\omega - RC\omega^2}}$.

5. De plus on aussi $\dfrac{\underline{s}}{\underline{u}} = \dfrac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_R} = \dfrac{1}{1+jRC\omega}$.
   Ainsi, $\boxed{\underline{H} = \dfrac{\underline{s}}{\underline{e}} = \dfrac{\underline{s}}{\underline{u}} \times \dfrac{\underline{u}}{\underline{e}} = \dfrac{1}{1+3jRC\omega - (RC\omega)^2}}$ (filtre passe-bas du deuxième ordre).
   Remarque : ce filtre est non-résonant car $Q = 1/3 < 1/\sqrt{2}$.

6. $\underline{H}_1 \times \underline{H}_2 = \left(\dfrac{1}{1+jRC\omega}\right)^2 = \dfrac{1}{1+2jRC\omega-(RC\omega)^2}$.
   Ce résultat diffère légèrement de $\underline{H}$, à cause du terme central. Cependant ce terme est négligeable par rapport aux autres dans les régimes basse et haute fréquence pour lesquels l'impédance d'entrée du second est très supérieure à l'impédance de sortie du premier.
   Ceci valade la condition de mise en cascade des filtres.