Fiche 38 : Fonctions continues.

Exercice 1

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$. Montrer qu'il existe c dans $[0,1]$ tel que $f(c)=c$.

Exercice 2

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ telle que $f(0)=f(1)$. Montrer qu'il existe c dans $[0,\frac{1}{2}]$ tel que $f(c)=f(c+\frac{1}{2})$.

Exercice 3

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ continue et $\lim\limits_{-\infty} f=0\,;\lim\limits_{+\infty} f=0$.
Montrer que f est bornée et possède un maximum.

Exercice 4

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue en 0 telle que $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=f(2x)$. Montrer que f est constante.

Donner un exemple de fonction $f:\mathbb{R}*\to\mathbb{R}$ continue non constante telle que $\forall x\in\mathbb{R}^*\ ,\ f(x)=f(2x)$.

Exercice 5

Donner un exemple d'application $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ non constante telle que :

$$\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=f(x^2).$$

On suppose f continue en 0 et en 1, montrer que f est constante.

Exercice 6

Calculer la fonction dérivée d'ordre $n\in\mathbb{N}$ des fonctions définies par :

$$f(x)=\sin x\quad;\quad g(x)=\sin^2 x\quad;\quad h(x)=\sin^3 x+\cos^3 x\quad;\quad i(x)=\frac{1}{1-x^2}$$

Exercice 7

Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une fonction (non nécessairement continue) et $T\in\mathbb{R}$, on dit que f est T-*périodique* ou *périodique de période* T quand : $\forall x\in\mathbb{R}$:

$$f(x+T)=f(x)$$

On note $T_f\subset\mathbb{R}$ l'ensemble des périodes de f.
On dit que f est *périodique* quand elle admet au moins une période $T>0$ autrement dit quand $T_f\cap\mathbb{R}_+^*\neq\emptyset$.

1. Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une fonction, montrer que T_f est un sous groupe (additif) de $\mathbb{R}$.
2. Pour quelle fonction f a-t-on $T_f=\mathbb{R}$?
3. Donner une fonction f telle que $T_f=\{0\}$.
4. Déterminer T_f quand $f=1_{\mathbb{Q}}$ et $f=1_{\mathbb{R}-\mathbb{Q}}$.
5. Si f est continue, montrer que s'il existe $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}\in(T_f)^{\mathbb{N}}$ avec $T_n\to 0^+$ alors f est constante et $T_f=\mathbb{R}$.
6. Montrer que si f est continue, périodique et non constante alors il existe $T>0$ tel que $T_f=T\mathbb{Z}$.

   On dit dans ce cas que T est *la* période de f.