Espaces vectoriels.

Plan

1 Espaces vectoriels et sous espaces. **1**

2 Familles génératrices, libres, bases **3**

2.1 Familles génératrices 3
2.2 Familles libres 4
2.3 Bases 5

3 Dimension d'un espace vectoriel **6**

3.1 Espace de dimension finie 6
3.2 Dimension d'un espace 7
3.3 Dimension d'un sous espace 7
3.4 Somme directe et dimension 8

1 Chapitre 12 : Espaces vectoriels et sous espaces.

Un **espace vectoriel** E sur un corps $\mathbb{K}$ (très souvent $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) ou $\mathbb{K}$**-espace vectoriel** est un ensemble non vide E muni : d'une addition $+$ pour lequel E est un groupe d'élément neutre $0 = 0_E$ et d'un produit (noté parfois . mais souvent omis) des éléments de E par ceux de $\mathbb{K}$ à valeurs dans E, associatif, distributif sur $+$.

On demande de plus que si v est un vecteur de E alors $1_{\mathbb{K}}.v = 1.v = v$.

Les éléments de E, les **vecteurs**, d'un espace sont souvent notés avec des lettres romaines et les éléments de $\mathbb{K}$, les **scalaires**, sont notés avec des lettres grecques.

Les ensembles :

- $\{0\}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, ..., $\mathbb{R}^n$ pour $n \in \mathbb{N}$;
- l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles ;

- l'ensemble $\mathbb{R}[X]$ des polynômes réels ;
- l'ensemble $\mathbb{R}(X)$ des fractions rationnelles réelles ;
- Si X est un ensemble non vide, l'ensemble $\mathbb{R}^X$ des applications réelles définies sur X ;
- l'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ des matrices réelles de taille $n \times p$;

sont naturellement des espaces vectoriels réels.

Les ensembles :

- $\{0\}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^2$, $\mathbb{C}^3$, ..., $\mathbb{C}^n$ pour $n \in \mathbb{N}$;
- l'ensemble $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ des suites complexes ;
- l'ensemble $\mathbb{C}[X]$ des polynômes complexes ;
- l'ensemble $\mathbb{C}(X)$ des fractions rationnelles complexes ;
- Si X est un ensemble non vide, l'ensemble $\mathbb{C}^X$ des applications réelles définies sur X ;
- l'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ des matrices complexes de taille $n \times p$;

sont naturellement des espaces vectoriels complexes et du coup réels.

Définition 1 *Si E est un $\mathbb{K}$-espace et F une partie de E, on dit que F est un* ***sous espace*** *de E quand c'est une partie non vide stable par combinaison linéaire autrement dit si :*

- *Si $(u \in F \text{ et } v \in F)$ alors $u + v \in F$,*
- *Si $(\lambda \in \mathbb{K} \text{ et } u \in F)$ alors $\lambda u \in F$.*

Si E est un espace vectoriel alors $\{0\}$ et E sont 2 sous espaces de E.

Si v est un vecteur non nul de E, l'ensemble

$$\mathbb{K}.v = \{\lambda.v / \lambda \in \mathbb{K}\}$$

est un sous espace de E appelé **droite vectorielle engendrée ou dirigée par** v.

Dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, on a des sous espaces connus :

- Les droites vectorielles ou droites linéaires de $\mathbb{R}^2$.
- Les droites et plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

Propriété 1 *Si F et G sont 2 sous espaces d'un espace vectoriel E alors $F \cap G$ est un sous espace de E. Plus généralement si $(F_i)_{i \in I}$ est une famille de sous espaces de E alors $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un sous espace de E.*

(Attention avec la réunion !)

Définition 2 *Si $F_1, \dots, F_n$ sont des sous espaces d'un espace E, alors, on définit leur* ***somme vectorielle*** *:* $F_1 + \cdots + F_n = \{v_1 + \cdots + v_n / v_1 \in F_1, \dots, v_n \in F_n\}$

La somme vectorielle $F_1 + \cdots + F_n$ est un sous espace de E. C'est le plus petit sous espace de E contenant à la fois F_1, F_2 ... et F_n.

On prendra garde au fait que la somme vectorielle n'a pas les propriétés classiques d'une addition, par exemple : $F + F = F$.

On dit que la somme vectorielle $F_1 + \cdots + F_n$ est **directe** quand de manière équivalente :
- pour tout vecteur v de $F_1 + \cdots + F_n$, l'écriture $v = v_1 + \cdots + v_n$ avec $v_1 \in F_1, \dots, v_n \in F_n$ est unique,
- si $0 = v_1 + \cdots + v_n$ avec $v_1 \in F_1, \dots, v_n \in F_n$ alors $v_1 = \cdots = v_n = 0$.

Dans ce cas, on note :
$$F_1 \oplus \cdots \oplus F_n$$
La somme vectorielle de deux sous-espaces $F + G$ est directe quand on a simplement $F \cap G = \{0\}$.

Définition 3 *Si F et G sont 2 sous espaces de E, on dit que F et G sont* ***supplémentaires*** *dans E quand une des conditions équivalentes suivantes est réalisée :*
- *$F \oplus G = E$.*
- *$F + G = E$ et $F \cap G = \{0\}$.*
- *Tout vecteur u de E s'écrit de manière unique : $u = v + w$ avec $v \in F$, $w \in G$.*

2 Familles génératrices, libres, bases

2.1 Familles génératrices

On se place dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

On considère $v_1, \dots, v_n$ un ensemble fini de vecteurs de E et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des scalaires. Le vecteur :
$$v = \sum_{i \in I} \lambda_i . v_i = \lambda_1 v_1 + \dots \lambda_n v_n$$
est une **combinaison linéaire** des vecteurs $v_1, \dots, v_n$.

Plus généralement, on considère I un ensemble quelconque et $F = (v_i)_{i \in I}$ une famille indexée par I de vecteurs de E.

Si $(\lambda_i)_{i\in I}$ est une famille de scalaires indexée par I, on dit que $(\lambda_i)_{i\in I}$ est à **support fini (ou presque nulle)** quand l'ensemble des indices $i \in I$ tel que λ_i est non nul est fini. Dans ce cas, on note :

$$v = \sum_{i\in I} \lambda_i.v_i$$

la somme réduite à ces indices. C'est une **combinaison linéaire** des vecteurs de F.

On note : $\mathrm{Vect}(F) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(F)$ l'ensemble des combinaisons linéaires (à coefficients dans $\mathbb{K}$) des vecteurs de F. On l'appelle **espace engendré par** F

Théorème 1 *L'ensemble* $\mathrm{Vect}(F)$ *est un sous espace vectoriel de* E*. C'est le plus petit sous espace vectoriel de* E *contenant les vecteurs de* F*. Pour cette raison, on l'appelle* ***sous espace engendré*** *par* F*.*

On convient que la famille vide engendre l'espace $\{0\}$: $\mathrm{Vect}(\emptyset) = \{0\}$

Une droite vectorielle de E est donc le sous espace engendré par un vecteur non nul.

Un **plan vectoriel** est le sous espace engendré par 2 vecteurs non colinéaires.

Définition 4 *Si* F *est une famille de* E*, on dit qu'elle est* ***génératrice*** *de* E *ou qu'elle* ***engendre*** E*, ou encore que* E ***est engendré*** *par* F *quand :*

$$E = \mathrm{Vect}(F)$$

Finalement : une famille $F = (e_i)_{i\in I}$ est génératrice de E si et seulement si, pour tout $v \in E$ il existe une famille à support fini $(\lambda_i)_{i\in I}$ tel que :

$$v = \sum_{i\in I} \lambda_i.v_i$$

2.2 Familles libres

Une famille finie $(e_1, \ldots, e_n)$ est **libre** quand pour tout $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ dans $\mathbb{K}$:

$$\text{Si } \lambda_1 e_{i_1} + \cdots + \lambda_n e_{i_n} = 0 \text{ alors } \lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_n = 0$$

Si $u \neq 0$ alors la famille (u) est libre.

Une famille de deux vecteurs (u, v) est liée si et seulement si u et v sont **colinéaires** ou **proportionnels** : il existe λ ou μ non nul dans $\mathbb{K}$ tel que :

$$u = \lambda.v \qquad \text{ou} \qquad v = \mu.u$$

Plus généralement :

Définition 5 *Si $F = (e_i)_{i \in I}$ est une famille de E, on dit qu'elle est **libre** quand, pour tout famille $(\lambda_i)_{i \in I}$ à support fini dans $\mathbb{K}$:*

$$\text{Si } \sum_{i \in I} \lambda_i . v_i = 0 \text{ alors } (\forall i \in I)\ \lambda_i = 0$$

*Une famille non libre est dite **liée**.*

Propriété 2 *Une famille est liée si et seulement si un de ses vecteurs est une combinaison linéaire d'autres vecteurs de la famille.*

Un critère pratique :

Propriété 3 *Dans l'espace $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, une famille de polynômes à coefficients 2 à 2 distincts est libre.*

2.3 Bases

Définition 6 *On dit qu'une famille $B = (e_i)_{i \in I}$ est une **base** de E quand elle est à la fois libre et génératrice de E.*

Si $B = (e_1, \dots, e_n)$ est une base finie, si $v \in E$, il existe une unique famille à de scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ tel que

$$v = \lambda_1 . e_1 + \dots + \lambda_n e_n$$

On dit que les $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ sont les **coordonnées** de v dans la base B.

Plus généralement, si $B = (e_i)_{i \in I}$ et si $v \in E$, il existe une unique famille à support fini de scalaires $(\lambda_i)_{i \in I}$ tel que

$$v = \sum_{i \in I} \lambda_i . e_i$$

On dit que les $(\lambda_i)_{i \in I}$ sont les **coordonnées** de v dans la base B.

Par définition, toute famille libre F est une base du sous espace vectoriel $\mathrm{Vect}(F)$ de E.

Propriété 4 (Exemple fondamental) *Dans l'espace $\mathbb{K}^n$ la famille :*

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

*est une base de $\mathbb{K}^n$ appelée **base canonique de** $\mathbb{K}^n$.*

Un vecteur $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de $\mathbb{K}^n$ a pour coordonnées dans cette base $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Propriété 5 *Dans l'espace $\mathbb{K}_n[X]$ la famille :*

$$(1, X, X^2, \dots, X^n)$$

*est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ appelée **base canonique de** $\mathbb{K}_n[X]$.*

Un polynôme $a_0+a_1X\cdots+a_nX^n$ de $\mathbb{K}_n[X]$ a pour coordonnées dans cette base $(a_0, a_1, \dots, a_n)$.

Propriété 6 *Dans l'espace $\mathbb{K}[X]$ la famille :*

$$(X^n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, X, \dots, X^n, \dots)$$

*est une base de $\mathbb{K}[X]$ appelée **base canonique de** $\mathbb{K}[X]$.*

Un polynôme

$$P = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n + \dots$$

(rappelons que c'est une somme finie) a pour coordonnées la famille $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans cette base.

3 Dimension d'un espace vectoriel

3.1 Espace de dimension finie

On considère E un espace vectoriel.

Définition 7 *On dit que l'espace E est de **dimension finie** quand il admet une famille génératrice finie et on note* $\dim(E) < \infty$. *On dit E est de **dimension infinie** dans le cas contraire et on note alors* $\dim(F) = \infty$.

Par exemple : $\dim(\mathbb{K}[X]) = \infty$.

A partir de maintenant, on suppose que E est de dimension finie. Dans cas, il admet des bases. On a même le célèbre :

Théorème 2 (Théorème de la base extraite (Version 1)) *De toute famille génératrice finie de E, on peut extraire une base de E.*

Si au contraire on dispose d'une famille libre :

Théorème 3 (Théorème de la base incomplète (Version 1)) *Si $F = (e_1, \dots, e_p)$ est une famille libre d'un espace E de dimension finie alors on peut la compléter de sorte à former une base de E.*

3.2 Dimension d'un espace

Propriété 7 *Si $E = \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_n)$, toute famille de $n+1$ vecteurs de E est liée.*

C'est une conséquence, admise ici de l'algorithme de Gauss sur l'étude des systèmes linéaires.

On peut alors montrer le théorème central :

Théorème 4 *Si E est de dimension finie alors toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments, nombre qui est appelé **dimension** de E et noté $\dim(E)$.*

Exemple fondamental :

$$\dim(\mathbb{K}^n) = n$$

De même, $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n+1$.

On convient par ailleurs : $\dim(\{0\}) = 0$.

On a du coup le théorème suivant très pratique ... quand on connait la dimension d'un espace.

Théorème 5 *Si E est un espace de dimension n et si F est une famille de n vecteurs de E alors F est une base de E si et seulement si elle est libre, si et seulement si elle est génératrice.*

Théorème 6 (Théorème de la base incomplète (version 2)) *Si $F = (e_1, \ldots, e_p)$ est une famille libre de E alors $p \leq dim(E) = n$. La famille libre F est une base de E si et seulement si $p = n$. Sinon, on peut compléter F en une base de E.*

Théorème 7 (Théorème de la base extraite (version 2)) *Si $F = (e_1, \ldots, e_p)$ est une famille génératrice de E alors $p \geq \dim(E) = n$. C'est une base de E si et seulement si $p = n$. Sinon, on peut extraire de F une base de E.*

En particulier, toute famille libre de n vecteurs dans $\mathbb{K}^n$ est une base de $\mathbb{K}^n$.

Toute famille de $n+1$ polynômes de $\mathbb{K}_n[X]$ dont les degrés sont distincts 2 à 2 est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

3.3 Dimension d'un sous espace

On considère un espace E vectoriel de dimension finie n.

Théorème 8 *Si E' est un sous espace vectoriel de E alors il est aussi de dimension finie et* $\dim(E') \leq \dim(E)$. *De plus, il y a égalité entre E' et E si et seulement si* $\dim(E) = \dim(E')$. *Autrement dit :*

$$\begin{cases} E' \subset E \\ \dim(E') = \dim(E) \end{cases} \implies E' = E$$

Il suit que les sous espaces de $\mathbb{R}^2$ sont : $\{0\}$, les droites vectorielles et $\mathbb{R}^2$. Les sous espaces de $\mathbb{R}^3$ sont : $\{0\}$, les droites vectorielles, les plans vectoriels et $\mathbb{R}^3$.

Définition 8 *Si $F = (e_1, \ldots, e_p)$, on pose :*

$$\mathrm{rg}(F) = \dim(\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p))$$

$\mathrm{rg}(F)$ *est le **rang** de la famille F.*

On obtient rapidement :

Propriété 8 *Si F est une famille de E alors :*

$$\mathrm{rg}(F) \leq \#(F) \qquad \mathrm{rg}(F) \leq \dim(E)$$

De plus :

- $\mathrm{rg}(F) = \#(F)$ *si et seulement si la famille F est libre ;*
- $\mathrm{rg}(F) = \dim(E)$ *si et seulement si F est une famille génératrice de E.*
- $\mathrm{rg}(F) = \#(F) = \dim(E)$ *si et seulement si F est une base de E.*

Concernant le produit des espaces vectoriels, on a :

Propriété 9 *Si $E_1, \ldots, E_n$ sont des espaces de dimensions finies alors :*

$$\dim(E_1 \times \cdots \times E_n) = \dim(E_1) + \cdots + \dim(E_n)$$

3.4 Somme directe et dimension

Fixons F et G 2 sous espaces d'un espace de dimension finie E.

Rappelons que si $F \cap G = \{0\}$ alors on note $F \oplus G = F + G$ et que F et G sont dits supplémentaires quand $E = F \oplus G$.

Propriété 10 *Si $F \cap G = \{0\}$ alors*

$$\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$$

Dans ce cas, en prenant une base de F puis une base de G et en les enchaînant, on construit une base de $F \oplus G$. On parle dans ce cas de ***base adaptée*** *à la somme précédente.*

Dans le cas où la somme n'est pas directe, on a plus généralement :

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

(formule dite de Grassmann)

Plus généralement, si on a $F_1, \ldots, F_n$ des sous espaces de E tel que :

$$F_1 \oplus \cdots \oplus F_n = E$$

alors $\dim(E) = \dim(E_1) + \dim(E_n)$ et on construit une **base adaptée** de E à la somme précédente en enchaînant des bases respectives de $E_1, \ldots E_n$.

Concernant la caractérisation des supplémentaires, on obtient :

Théorème 9 *Si F et G sont 2 sous espaces d'un espace vectoriel E de dimension finie E alors :*

$$\text{Si } \begin{cases} F \cap G = \{0\} \\ \dim(F) + \dim(G) = \dim(E) \end{cases} \quad \text{alors } F \oplus G = E$$

Du coup :

Propriété 11 *Tout sous espace F d'un espace vectoriel E de dimension finie admet des supplémentaires (plusieurs) qui ont tous la même dimension :* $\dim(E) - \dim(F)$.

Plus généralement :

Propriété 12 *Si $F_1, \ldots, F_n$ sont des sous espaces de E alors :*

$$\dim(F_1 + \cdots + F_n) \leq \dim(F_1) + \cdots + \dim(F_n)$$

et on a $F_1 \oplus \cdots \oplus F_n = E$ si et seulement si on a égalité.

Savoirs et savoirs faire indispensables

Savoirs

Définition d'un espace vectoriel, exemples de base.
Définition d'un sous espace vectoriel, d'une somme vectorielle, d'une somme directe.
Définition d'une famille libre, génératrice, d'une base.
Définition de la dimension. Dimensions des espaces classiques. Dimension d'une somme et d'une somme directe. Rang d'une famille.
Théorèmes des bases incomplètes et extraites.
Formule de Grassmann

Savoir-faire

Vérifier qu'un ensemble est un sous espace d'un espace donné.
Vérifier qu'une famille est libre, génératrice, est une base.
Mise en œuvre des théorèmes des bases incomplètes et extraites. Calcul du rang d'une famille.
Utiliser la formule de Grassmann.