Fiche 40 : Td du 15-01.

Exercice 1

On rappelle la limite classique pour $x \to 0$: $\frac{\sin(x)}{x} \to 1$.

On se donne $a \in]0, \pi[$ et on considère la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{a}{2^n}\right)$$

1. Quelle est la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (Monotonie, convergence) ?
2. En utilisant la formule d'arc double de sin simplifier u_n et déterminer sa limite.

Exercice 2

On fixe z_0 dans $\mathbb{C} - \mathbb{R}$ qu'on écrit sous forme trigonométrique : $z_0 = \rho e^{i\theta}$ ($\rho > 0$; $\theta \in] - \pi, \pi[-\{0\}$).

Étudier la suite complexe donnée par : pour $n \in \mathbb{N}$:

$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}$$

On pourra utiliser l'exercice précédent.

Exercice 3

Soit $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$. On note f la fonction :

$$z \mapsto \frac{z + \omega}{\overline{\omega} z + 1}.$$

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{U}$ et à valeurs dans $\mathbb{U}$.
2. Montrer que f est bijective de $\mathbb{U}$ sur $\mathbb{U}$ et déterminer sa réciproque.

Exercice 4

Dans cet exercice on prend pour définition de la fonction exp : $\exp' = \exp$ sur $\mathbb{R}$, $\exp(0) = 1$ et $e = \exp(1)$.
Soient (u_n) et (v_n) les deux suites définies pour $n \geq 1$ par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}.$$

1. (a) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
   (b) On note ℓ la limite commune de (u_n) et (v_n). Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:
   $$(n!)u_n < (n!)\ell < (n!)u_n + \frac{1}{n}.$$
   (c) En déduire que ℓ est un nombre irrationnel.
2. (a) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![1, n]\!]$:
   $$\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{k!}.$$
   En déduire que :
   $$u_n \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$
   .
   (b) Déterminer la limite de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Que peut-on en déduire pour ℓ ?
3. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) \geq 1 + x$.
   (b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$.

(c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$\exp(x) - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right) \geq 0$$

(d) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_n \leq \mathrm{e}$.

4. Conclure quant à l'irrationnalité de e.

Exercice 5

Montrer que si P est un polynôme réel tel que $\forall z \in \mathbb{U} : P(z) \in \mathbb{U}$
Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $a_n \in \mathbb{U}$ tel que $P = a_n X^n$.