Sup MPSI, Lycée Jean Perrin, 2025-2026.

Fiche 41 : Espaces vectoriels.

Exercice 1

Dire si les objets suivants sont des espaces vectoriels réels :

1. L'ensemble des fonctions réelles sur $[0,1]$, continues, positives ou nulles.
2. L'ensemble des fonctions réelles définies sur $\mathbf{R}$ vérifiant $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
3. L'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ vérifiant $f(1/2) = 0$.
4. L'ensemble des fonctions impaires sur $\mathbb{R}$.
5. L'ensemble des fonctions sur $\mathbb{R}$ qui sont nulle en 1 ou nulle en 4.
6. L'ensemble des polynômes de degré n.
7. L'ensemble des fonctions de classe C^2 vérifiant $f'' + \omega^2 f = 0$.
8. L'ensemble des primitives de la fonction xe^x sur $\mathbb{R}$.
9. L'ensemble des polynômes ne comportant pas de terme de degré 7.

Exercice 2

Montrer que dans $\mathbb{R}^3$: $\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}\right) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}3\\7\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\0\\-7\end{pmatrix}\right)$

Exercice 3

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les ensembles $P = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} / x+y+z=0\right\}$ et $D = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}\right)$

Montrer que P et D sont 2 espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, on considère $P_1 = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}\right)$, $P_2 = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}\right)$.

Montrer que $P_1 \cap P_2$ est une droite dont on donnera un système d'équations caractéristiques et un vecteur directeur.
A-t-on $P_1 \oplus P_2$? Déterminer $P_1 + P_2$.

Exercice 5

1. Montrer que les vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix}-1\\-1\\i\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}-1\\i\\1\end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix}i\\1\\-1\end{pmatrix}$ forment une base de l'espace vectoriel complexe $\mathbb{C}^3$.
2. Calculer les coordonnées de $v = \begin{pmatrix}1+i\\1-i\\i\end{pmatrix}$ dans cette base.
3. Compléter la famille v_1, v_2, v_3 pour former une base réelle de $\mathbb{C}^3$.
4. Calculer les coordonnées de $v = \begin{pmatrix}1+i\\1-i\\i\end{pmatrix}$ dans cette base.