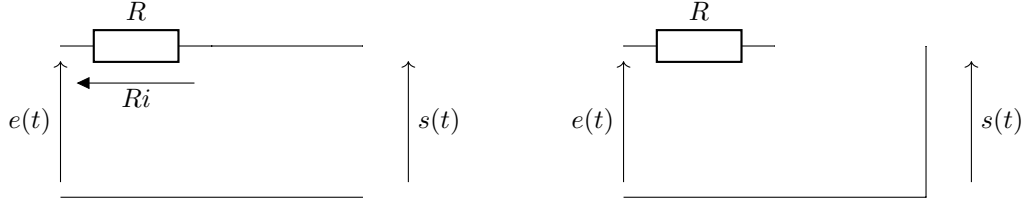


PROBLÈME I

# Microphone de guitare

## I.1) Circuits équivalents :



Régime basse fréquence

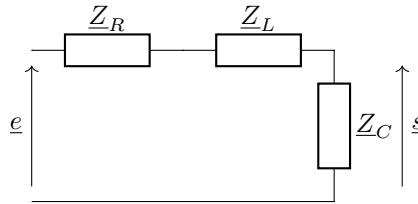
Régime basse fréquence

En basse fréquence,  $s(t) = e(t) + Ri = e(t)$  d'après la loi des mailles et avec  $i = 0$ , donc le filtre est passant.

En haute fréquence,  $s(t) = 0$  aux bornes d'un fil, donc le filtre est non-passant

Pour conclure, le filtre est probablement un **pas se bas**.

## I.2) En RSF, le circuit équivalent en complexe est :



En utilisant la relation du diviseur de tension :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{s}{e} = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_R + \underline{Z}_L} = \frac{1}{1 + \frac{\underline{Z}_R}{\underline{Z}_C} + \frac{\underline{Z}_L}{\underline{Z}_C}}$$

Avec  $\underline{Z}_R = R$ ,  $\underline{Z}_L = Lj\omega$  et  $\underline{Z}_C = \frac{1}{Cj\omega}$  il vient :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + RCj\omega + LC(j\omega)^2}$$

## I.3) On identifie : $\boxed{H_0 = 1}$ , $LC = \frac{1}{\omega_0^2}$ et $RC = \frac{1}{Q\omega_0}$ d'où $\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$ et $\boxed{Q = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{L}{C}}}$ .

## I.4) Il y a résonance lorsque l'amplitude de $s$ passe par un maximum pour une valeur finie de la pulsation, ce qui correspond à un maximum pour $|\underline{H}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}$ .

La fonction  $1/\sqrt{\quad}$  étant strictement décroissante de  $\mathbb{R}^{++}$  dans  $\mathbb{R}^{++}$ , cela revient à trouver le minimum de  $f(x) = (1 - x^2)^2 + (x/Q)^2$  où  $x = \omega/\omega_0$ .

$$f'(x) = -4x(1 - x^2) + \frac{2x}{Q^2} = 4x \left( x^2 - 1 + \frac{1}{2Q^2} \right).$$

$x > 0$  donc  $f'(x)$  s'annule pour  $x = x_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$  qui est bien défini lorsque  $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Pour  $x < x_r$ ,  $f'(x) < 0$  et pour  $x > x_r$ ,  $f'(x) > 0$  :  $x_r$  est bien un minimum de la fonction  $f(x)$ .

En conclusion, il y a résonance en  $\boxed{\omega_r = \omega_0 x_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}}$  si  $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

**I.5)** Le gain en décibel est défini comme  $G_{dB} = 20 \log(G(\omega))$ , où

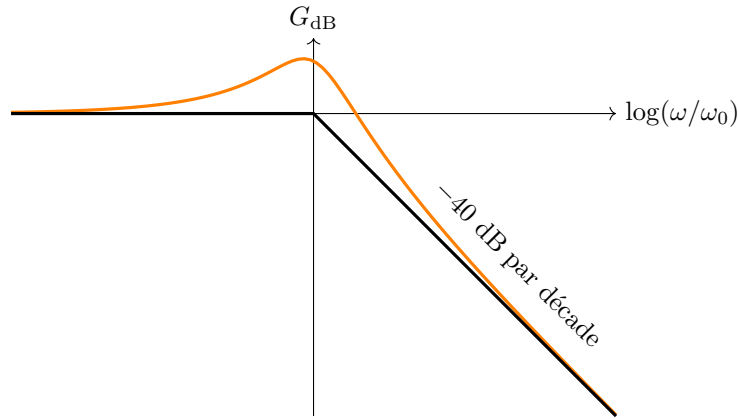
$$G(\omega) = |\underline{H}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}$$

On trace le diagramme de Bode asymptotique en gain :

- en basse fréquence pour  $\omega \ll \omega_0$ ,  $G(\omega) \approx 1$  donc  $G_{dB,BF} = 0$  ;
- en haute fréquence pour  $\omega \gg \omega_0$ ,  $G(\omega) \approx \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$  donc  $G_{dB,HF} = -40 \log(\omega/\omega_0)$ .

Ces asymptotes se coupent en  $\omega = \omega_0$ .

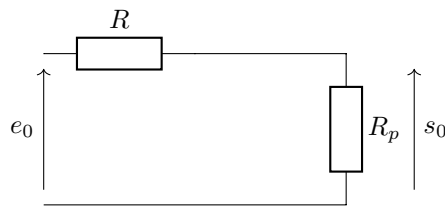
On obtient le diagramme de Bode suivant :



**I.6)** On utilise un GBF pour générer une tension d'entrée sinusoïdale de fréquence variable. Avec un oscilloscope (ou deux multimètres en mode AC), on mesure les amplitudes  $E_m$  de  $e(t)$  et  $S_m$  de  $s(t)$ . Le gain en décibel est obtenu en calculant  $G_{dB} = 20 \log\left(\frac{S_m}{E_m}\right)$ . On répète l'opération pour de nombreuses fréquences de façon à obtenir des mesures régulièrement espacées sur un axe logarithmique, ce qui permet de tracer le graphe.

Remarque : dans le cas du micro, ce n'est possible d'effectuer ces mesures car la tension  $e$  n'est pas produite par un générateur mais par l'oscillation de la corde, qu'il est difficile de faire varier sur de grands intervalles de fréquence.

**I.7)** Le gain statique est obtenu en étudiant le circuit équivalent dans le régime basse fréquence. Ici on a :



Par le diviseur de tension, il vient  $s = \frac{R_p}{R_p + R} e$  donc le gain statique est  $H'_0 = \frac{s_0}{e_0} = \frac{R_p}{R_p + R}$ .

Remarque : on peut aussi l'obtenir en calculant à nouveau la fonction de transfert et en prenant la limite  $\omega \rightarrow 0$ , mais les calculs sont plus laborieux.

On remarque que le gain statique est diminué sous l'effet de la résistance  $R_p$ , ce qui permet de diminuer l'intensité sonore restituée et notamment de créer un son qui vibre (principe de la pédale « wah-wah »).

**I.8)** Pour une association parallèle on a :

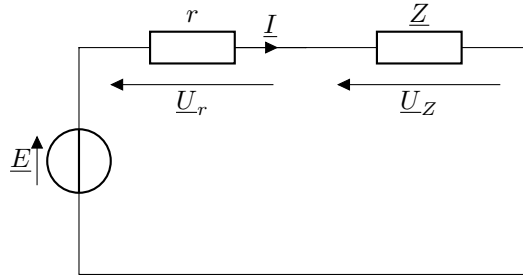
$$\underline{Z} = \frac{(\underline{Z}_L + \underline{Z}_R)\underline{Z}_C}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_R + \underline{Z}_C} = \frac{\underline{Z}_L + \underline{Z}_R}{1 + \frac{\underline{Z}_L + \underline{Z}_R}{\underline{Z}_C}}$$

On obtient :

$$\underline{Z} = \frac{R + Lj\omega}{1 - LC\omega^2 + RCj\omega}$$

**I.9)** On ne peut pas mesurer simultanément les tensions  $u_r$  et  $u_Z$ , car la masse de l'oscilloscope est imposée par la présence du générateur. On peut mesurer simultanément  $e$  et  $\underline{U}_Z$ . On utilise alors le menu MATH de l'oscilloscope pour lui faire afficher  $u_r = e - u_Z$ .

**I.10)** On passe le circuit en complexe, avec les amplitudes complexes des tensions et de l'intensité :



D'après la définition de l'impédance,  $\underline{U}_r = r\underline{I}$  et  $\underline{U}_Z = \underline{Z}\underline{I}$ . On en déduit  $\underline{Z} = r \frac{\underline{U}_Z}{\underline{U}_r}$ .

**I.11)** La période est de 10 divisions soit  $T = 1,0 \text{ ms}$ , la fréquence vaut donc  $f = \frac{1}{T} = 1,0 \text{ kHz}$ .

On prend le module de l'impédance dans l'expression obtenue à la question précédente :  $|\underline{Z}| = r \frac{|\underline{U}_Z|}{|\underline{U}_r|}$ .

Or le module de l'amplitude complexe d'une tension est son amplitude réelle donc  $|\underline{Z}| = r \frac{U_{Zm}}{U_{rm}}$ .

Expérimentalement on mesure  $U_{Zm} = 2,6 \text{ V}$  et  $U_{rm} = 3,0 \text{ V}$  donc  $|\underline{Z}| = 8,7 \text{ k}\Omega$ .

On prend l'argument de l'impédance dans l'expression obtenue à la question précédente :  $\arg(\underline{Z}) = \arg(\underline{U}_Z) - \arg(\underline{U}_r) = \Delta\varphi_{U_Z/U_r}$  qui est le déphasage de  $U_Z$  par rapport à  $U_r$ .

La tension  $U_Z$  avance de  $\Delta t = 200 \mu\text{s}$  sur  $U_r$  donc  $\arg(\underline{Z}) = \Delta\varphi_{U_Z/U_r} = 2\pi f \Delta t = 1,3 \text{ rad}$ .

**I.12)** Lorsque  $\omega \rightarrow 0$ ,  $\underline{Z} \approx R$  donc  $|\underline{Z}| \approx R$ . On lit directement cette limite qui semble atteinte sur le graphe fourni :  $R = 2,0 \text{ k}\Omega$ .

**I.13)** On peut mettre  $\underline{Z}$  sous la forme :

$$\underline{Z} = RQ^2 \frac{1}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

Le module est alors :

$$|\underline{Z}| = \frac{RQ^2}{\sqrt{1 + Q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}$$

Il prend sa valeur maximale lorsque le dénominateur prend sa valeur minimale. Or le dénominateur est borné inférieurement par 1 et cette borne est atteinte en  $\omega = \omega_0$  : le maximum de  $|\underline{Z}|$  se fait donc en  $\omega = \omega_0$  et vaut  $|\underline{Z}|_{\max} = RQ^2$ .

On lit graphiquement que le maximum se fait à la fréquence  $f_0 = 3,0 \times 10^3 \text{ Hz}$  soit à la pulsation  $\omega_0 = 2\pi f_0 = 1,9 \times 10^4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .

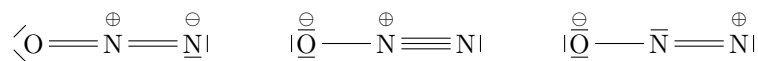
La valeur maximale vaut  $|\underline{Z}|_{\max} = 2 \times 10^5 \Omega$  donc  $Q = \sqrt{\frac{|\underline{Z}|_{\max}}{R}} = 10$ .

On a alors  $C = \frac{1}{RQ\omega_0} = 2,7 \text{ nF}$  et  $L = \frac{RQ}{\omega_0} = 1,1 \text{ H}$ .

PROBLÈME II

# Décomposition du protoxyde d'azote

**II.1)**  $\text{N}_2\text{O}$  possède 16 électrons qui s'assemblent en 8 doublets. On peut représenter trois formes mésomères :



La dernière forme ne respecte pas la règle de l'octet, l'atome d'azote situé à droite n'ayant que 3 doublets autour de lui.

**II.2)** O étant plus électronégatif que N, il est plus probable que ce soit lui qui porte la charge formelle négative. La deuxième forme est ainsi la plus probable.

Pour cette forme, la liaison O-N est polarisée fortement de O vers N ce qui confère un moment dipolaire à la molécule.

Ce moment dipolaire est légèrement atténué par les oscillations peu fréquentes vers la première forme dont le moment dipolaire est opposé.

**II.3)** Soit  $\xi(t)$  l'avancement à l'instant  $t$ , il est tel que  $n(t) = n_1 - \xi(t)$ . On a aussi  $n_{\text{N}_2}(t) = \xi(t)$  et  $n_{\text{O}_2} = \frac{1}{2}\xi(t)$

La quantité totale de gaz à l'instant  $t$  est  $n_{\text{tot}}(t) = n_{\text{N}_2\text{O}}(t) + n_{\text{N}_2}(t) + n_{\text{O}_2} = n(t) + \frac{3}{2}\xi(t) = n(t) + \frac{3}{2}(n_1 - n(t)) = \frac{3}{2}n_1 - \frac{1}{2}n(t)$ .

D'après la loi des gaz parfaits,  $P(t) = \frac{n_{\text{tot}}(t)RT}{V} = \frac{3}{2} \times \frac{n_1 RT}{V} - \frac{1}{2} \times \frac{n(t)RT}{V}$ .

Initialement il n'y a que du protoxyde d'azote donc  $P_1 = \frac{n_1 RT}{V}$ .

On en déduit la relation demandée :

$$P(t) = \frac{3}{2}P_1 - \frac{n(t)RT}{2V} \quad (1)$$

**II.4)** On dérive l'expression (1) :  $\frac{dP}{dt} = -\frac{RT}{2V} \frac{dn}{dt} = \frac{RT}{2} v$ .

Donc la vitesse de réaction a pour expression :  $v = \frac{2}{RT} \frac{dP}{dt}$ .

**II.5)** On suppose la réaction d'ordre 1 donc la loi de vitesse est  $v = k[\text{N}_2\text{O}] = k \frac{n(t)}{V}$ .

Or  $\frac{n(t)}{V} = -\frac{2}{RT} \left( P(t) - \frac{3}{2}P_1 \right)$  d'après la relation (1).

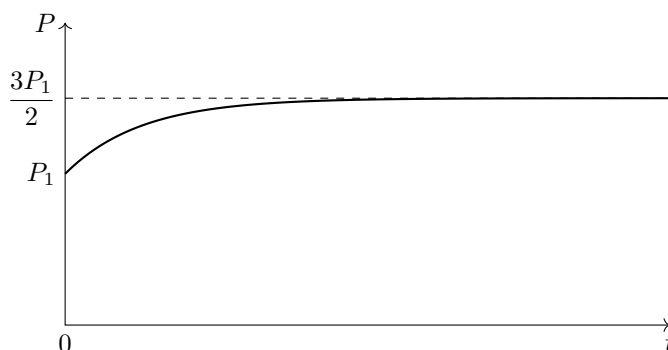
On en déduit  $\frac{2}{RT} \frac{dP}{dt} = -\frac{2k}{RT} \left( P(t) - \frac{3}{2}P_1 \right)$  soit  $\frac{dP}{dt} = -k \left( P(t) - \frac{3}{2}P_1 \right)$ .

Cette équation se met sous la forme d'une équation différentielle du premier ordre :  $\frac{dP}{dt} + kP(t) = \frac{3}{2}kP_1$ .

**II.6)** La solution générale de cette équation est  $P(t) = \frac{3}{2}P_1 + \lambda e^{-kt}$ .

La condition initiale est  $P(0) = P_1$  soit  $\frac{3}{2}P_1 + \lambda = P_1$  d'où  $\lambda = -\frac{1}{2}P_1$ .

Pour conclure, la solution est  $P(t) = \frac{3}{2}P_1 - \frac{1}{2}P_1 e^{-kt}$ .



**II.7)** Il vient  $3 - 2\frac{P(t)}{P_1} = 3 - (3 - e^{-kt}) = e^{-kt}$  donc  $\ln\left(3 - 2\frac{P(t)}{P_1}\right) = -kt$ .

Le graphe de  $\ln\left(3 - 2\frac{P}{P_1}\right) = f(t)$  est effectivement bien modélisé par une droite passant par l'origine,  $f(t)$  est donc linéaire. Ceci confirme l'hypothèse de l'ordre 1 pour la réaction.

On peut alors interpréter la pente de la droite comme  $-k$ . En prenant le dernier point sur le graphe, on a  $-k = \frac{-1}{90\text{s}}$  d'où

$$\boxed{k = 1,1 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}}.$$

**II.8)** Le temps de demi-réaction est la durée au bout de laquelle l'avancement a atteint la moitié de sa valeur finale. Pour une réaction totale, c'est aussi la durée pour laquelle la moitié du réactif initialement présent a été consommé.

On obtient ici  $\boxed{t_{1/2}(T_1) = 63 \text{ s}}$ .

**II.9)** La loi d'Arrhenius relie la constante de vitesse à la température :  $\boxed{k(T) = A \exp\left(-\frac{E_a}{RT}\right)}$ .

On en déduit :

$$\frac{t_{1/2}(T_2)}{t_{1/2}(T_1)} = \frac{k(T_1)}{k(T_2)} = \exp\left(\frac{E_a}{R} \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right)\right)$$

Avec  $T_1 = 873 \text{ K}$ ,  $T_2 = 1200 \text{ K}$ ,  $E_a = 280 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$  et  $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  on obtient  $\frac{t_{1/2}(T_2)}{t_{1/2}(T_1)} = 2,72 \times 10^{-5}$  donc

$$\boxed{t_{1/2}(T_2) = 1,7 \text{ ms}}.$$

**II.10)** Cette durée étant plus faible que celle de la compression, la cinétique de libération de dioxygène par la décomposition du protoxyde d'azote est suffisamment rapide pour assurer le « boost » en même temps que la compression se produit.