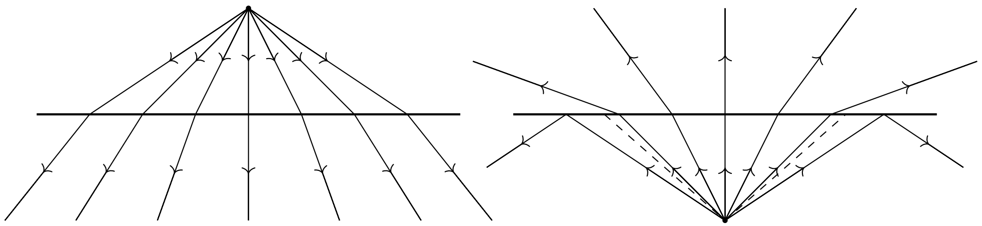
Exercice 1. Nénuphar

1. Lorsque la lumière atteint le dioptre air-eau, l’indice optique augmente donc le rayon réfracté existe toujours et se rapproche de la normale (schéma de gauche).
2. Lorsque la lumière atteint le dioptre eau-air, l’indice optique diminue donc le rayon réfracté n’existe pas toujours car une réflexion totale est possible pour des rayons suffisamment inclinés (schéma de droite).

   Le rayon limite a un angle d’indicence $\boxed{i_{\text{lim}} = \arcsin(n_a/n_e)} = \underline{48{,}8°}$.

   Les rayons réfractés s’inscrivent dans un cône limité par les rayons limites représentés en pointillés.



3. Si ces rayons supposés être réfractés rencontrent une paroi opaque comme un nénuphar, plus aucun rayon ne sort de l’eau. Ainsi la source devient invisible à l’extérieur.

   Pour une source à une profondeur h, l’intersection du cône de réfraction avec la surface de l’eau est un cercle de rayon $R_{\text{lim}} = h\tan(i_{\text{lim}})$. Il faut donc que le nénuphar ait un rayon $R > R_{\text{lim}}$. Inversement, il faut que $\boxed{h < \dfrac{R}{\tan(i_{\text{lim}})}}$.

   Application numérique : $\underline{h < 8{,}8\,\text{cm}}$.

Exercice 2. Détecteur de pluie

1. On utilise du rayonnement infrarouge car il est invisible, ainsi il ne gêne pas la conduite.
2. Il y a réfraction sur la dioptre plexiglas-air.

   L’angle du rayon réfracté vaut $\boxed{i = \arcsin\left(\dfrac{n_p}{n_v}\sin(\theta)\right)} = \underline{44°}$.

   Il vient frapper le dioptre verre-air en I avec le même angle (angles alternes-internes).

   Or l’angle limite permettant la réfraction vaut $\boxed{i_{\text{lim}} = \arcsin\left(\dfrac{n_0}{n_v}\right)} = \underline{41°}$.

   Puisque $\underline{i > i_{\text{lim}}}$, il y a <u>réflexion totale</u>.

   Ceci se reproduit lors des rebonds successifs sur la face supérieure du pare-brise (il faut supposer qu’il y a de l’air entre l’émetteur et le capteur pour que le rayon rebondisse aussi sur la face inférieure).
3. En présence de pluie, l’angle limite permettant la réfraction vaut $\boxed{i'_{\text{lim}} = \arcsin\left(\dfrac{n_e}{n_v}\right)} = \underline{61°}$.

   Cette fois $\underline{i < i'_{\text{lim}}}$ donc <u>la réfraction se produit</u>.
4. En présence d’eau, une partie de l’énergie lumineuse est réfractée et sort dans l’air. Ainsi la capteur reçoit une intensité moindre, signe de la présence de pluie.

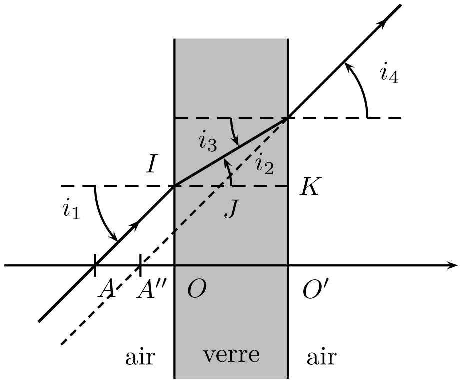
   Cependant une partie du rayon est toujours réfléchie, donc l’intensité captée n’est pas nulle. Mais si la pluie devient plus intense, le rayon est réfracté sur de nombreuses gouttes, et le capteur reçoit une intensité d’autant plus faible.

   Ainsi l’intrensité est inversement reliée au nombre de gouttes de pluie sur le pare-brise, ce qui permet d’adapter la vitesse des essuie-glaces.

Exercice 3. Traversée d’une vitre

1. Au niveau du dioptre air/verre : $n_{\text{air}} \times \sin(i_1) = n\sin(i_2)$ d’où $\boxed{\sin(i_2) = \sin(i_1) \times n_{\text{air}}/n} = 0,47$ et $\underline{i_2 = 28°}$.
2. $i_3 = i_2$ car ce sont des angles alternes-internes. Au niveau du dioptre verre/air, $n\sin(i_3) = n_{\text{air}} \times \sin(i_4)$ soit $\boxed{\sin(i_4) = n\sin(i_2)/n_{\text{air}} = \sin(i_1)}$. On en déduit $\underline{i_4 = i_1 = 45°}$.
3. Les rayons incident et émergent font le même angle par rapport à l’horizontale, ils sont donc parallèles entre eux, et ce quel que soit le rayon incident.

   Justifions la conformité avec le principe du retour inverse de la lumière par un raisonnement par l’absurde. Supposons que le rayon émergent n’est pas parallèle au rayon incident, par exemple qu’il se rapproche de la normale. Inversons le rayon émergent, il devient un rayon incident. La vitre étant symétrique, il va émerger lui aussi en se rapprochant de la normale. Et ce rayon est alors non confondu avec le rayon incodent initial, ce qui contredit le principe du retour inverse de la lumière.
4. Le décalage latéral est $AA'' = IJ = IK - JK$. Or $JK = \dfrac{KI'}{\tan(i_1)} = IK\dfrac{\tan(i_2)}{\tan(i_1)}$. On en déduit $\boxed{AA'' = e\left(1 - \dfrac{\tan(i_2)}{\tan(i_1)}\right)} = \underline{2{,}3\,\text{mm}}$.



Exercice 4. Dispersion intermodale d'une fibre à saut d'indice

1. La distance parcourue le long de l'axe est $\boxed{L = d\cos\alpha}$.
2. La vitesse de l'onde lumineuse dans le cœur de la fibre est $v = \dfrac{c}{n_c}$ donc elle parcourt la distance $d = \dfrac{L}{\cos\alpha}$ en une durée $\Delta t = \dfrac{d}{v} = n_c\dfrac{d}{c}$ soit $\boxed{\Delta t = \dfrac{n_c L}{c.\cos\alpha}}$.
3. En prenant en compte tous les rayons incidents dans le cône d'acceptance, l'angle α prend toutes les valeurs entre 0 et β. Cosinus étant une fonction monotone décroissante sur cet intervalle, $\cos\alpha \in [\cos\beta, 1]$ où $\cos\beta = \sin i_{\text{lim}} = \dfrac{n_g}{n_c}$.

   Ainsi, $\dfrac{1}{\cos\alpha} \in \left[\dfrac{n_c}{n_g}, 1\right]$ donc $\boxed{\Delta t \in \left[\dfrac{n_c L}{c}, \dfrac{n_c^2 L}{n_g c}\right]}$.
4. L'étalement temporel est la largeur de l'intervalle :
   $\boxed{\delta t = \Delta t_{\max} - \Delta t_{\min} = \dfrac{n_c L}{n_g c}(n_c - n_g)} = \underline{\delta t = 1{,}6 \times 10^{-7}\,\text{s}}$.
5. Il faut que deux impulsions successives ne se superposent pas, donc que leur période d'émission soit supérieure à leur étalement : $T > \delta t$ donc $\boxed{f < \dfrac{1}{\delta t}} = \underline{6{,}3\,\text{MHz}}$.

Exercice 5. Déviation par un prisme

1. D'après la loi de Descartes pour la réfraction :
   - en I : $\boxed{\sin(i_1) = n\sin(r_1)}$;
   - en J : $\boxed{n\sin(r_2) = \sin(i_2)}$.
2. La somme des angles d'un quadrilatère est égale à 360°. Les angles en I et J étant droits, on obtient $\alpha = 180° - A$. Dans le triangle ILJ, la somme des angles vaut 180° donc $r_1 + r_2 + \alpha = 180°$ d'où $\boxed{r_1 + r_2 = A}$.
3. La première déviation est $d_1 = i_1 - r_1$ et la seconde $d_2 = i_2 - r_2$ donc la déviation totale vaut $\boxed{D = d_1 + d_2 = i_1 + i_2 - (r_1 + r_2) = i_1 + i_2 - A}$.
4. Le verre du prisme est **dispersif**.
5. Valeurs :
   - radiation violette extrême de longueur d'onde $\lambda = 380\,\text{nm}$: $n = 1{,}597$, $r_1 = 28{,}7°$, $r_2 = 31{,}3°$, $i_2 = 56{,}2°$ donc $\boxed{D = 46{,}2°}$;
   - radiation rouge extrême de longueur d'onde $\lambda = 780\,\text{nm}$: $n = 1{,}549$, $r_1 = 29{,}6°$, $r_2 = 30{,}4°$, $i_2 = 51{,}5°$ donc $\boxed{D = 41{,}5°}$.
6. On en déduit que l'étalement angulaire du faisceau est $\alpha = 4{,}7°$. À une distance $d = 2\,\text{m}$, l'étalement linéaire est $\boxed{L \approx d\tan(\alpha) = 16\,\text{cm}}$.

   On observe le spectre de la lumière blanche décomposé par le prisme, le violet étant le plus dévié.

Exercice 6. Réfractomètre de Pulfrich

1. On note r l'angle du rayon réfracté pour un rayon incident avec l'angle i sur le dioptre corps / verre. D'après la deuxième loi de Descartes pour la réfraction, $n\sin(i) = n_0\sin(r)$.

   L'angle incident sur le dioptre verre / air est alors $\pi/2 - r$ et la loi de Descartes s'écrit $n_0\sin(\pi/2 - r) = \sin(\alpha)$ (on prend l'indice de l'air égal à 1).

   On a donc $\sin(\alpha) = n_0\cos(r) = n_0\sqrt{1 - \sin^2(r)} = \sqrt{n_0^2 - (n_0\sin(r))^2}$ soit $\boxed{\sin(\alpha) = \sqrt{n_0^2 - n^2\sin^2(i)}}$.
2. $\sqrt{n_0^2 - n^2\sin^2(i)}$ varie de façon monotone décroissante entre $n_0 > 1$ et $\sqrt{n_0^2 - n^2} < 1$. Or $\sin(\alpha) \leqslant 1$ donc va varier entre 1 et $\sqrt{n_0^2 - n^2}$. α varie donc entre $\arcsin(\sqrt{n_0^2 - n^2})$ et $\pi/2$.

   On voit donc de la lumière sortir pour des angles supérieurs à $\boxed{\alpha_{\min} = \arcsin(\sqrt{n_0^2 - n^2})}$.
3. $\boxed{n = \sqrt{n_0^2 - \sin^2(\alpha_{\text{lim}})} = 1{,}48}$.

4. Pour que l'indice soit mesurable, il faut que α_{lim} existe. Il faut donc que $\sqrt{n_0^2 - n^2} \leqslant 1$ soit $\boxed{n \geqslant \sqrt{n_0^2 - 1} = 1{,}41}$. Si cette condition n'est pas respectée, le phénomène de réflexion totale se produit, et la lumière ne ressort pas du dispositif.
5. Vérifions que la réflexion totale ne se produit pas dans ce cas, même pour $n = 1$ (indice le plus faible possible).
   L'angle incident le plus incliné ($i = \pi/2$) donne un rayon réfracté tel que $n_0 \sin(r) = 1$. L'angle incident sur le dioptre verre / air vaut $\pi/3 - r$ (à vérifier à l'aide d'un schéma).
   $n_0 \sin(\pi/3 - r) = n_0 \sin(\pi/3)\cos(r) - n_0 \cos(\pi/3)\sin(r) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{n_0^2 - n_0^2 \sin^2(r)} - \dfrac{1}{2} n_0 \sin(r) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{n_0^2 - 1} - \dfrac{1}{2} = 0,72 < 1$ donc il y a un rayon réfracté. CQFD.

Exercice 7. Arc-en-ciel

1. La goutte étant sphérique, le dioptre eau/air a localement une normale confondue avec un rayon du rayon, qui passe par son centre O.
   D'après le première loi de Snell-Descartes, les rayons réfractés et réfléchis sont dans le plan d'incidence contenant le rayon incident et la normale, donc contenant O. Comme toutes normales contiennent O, ce sera le même plan pour toutes les réfractions et réflexions.
2. Les triangles dans le cercle sont isocèles, donc $\alpha = r$ et $\gamma = \beta$. D'après la deuxième loi de Descartes pour la réflexion, $\beta = \alpha$. On a donc $\boxed{\alpha = \beta = \gamma = r}$.
   Par symétrie entre le rayon entrant dans la goutte et le rayon sortant, on a $\boxed{\delta = i}$.
3. Exprimons les déviations :
   — première réfraction : $i - r$;
   — réflexion : $\pi - 2r$;
   — deuxième réfraction : $i - r$
   Les déviations se font toutes dans la même direction, on les ajoute pour trouver la déviation totale : $\boxed{D = \pi + 2i - 4r}$.
4. D'après la deuxième loi de Descartes pour la réfraction sur le dioptre air/eau, $n_{\text{air}} \sin(i) = n \sin(r)$ où $n_{\text{air}} = 1$ donc $\sin(i) = n \sin(r)$.
5. $\dfrac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}i} = 0 \Leftrightarrow 2 - 4\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}i} = 0$ soit $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}i} = 1/2$. En prenant le carré : $\dfrac{1 - \sin^2(i_m)}{n^2 - \sin^2(i_m)} = \dfrac{1}{4}$ donc $4 - 4\sin^2(i) = n^2 - \sin^2(i)$.
   On isole : $\sin^2(i_m) = \dfrac{4 - n^2}{3}$ soit $\boxed{i_m = \arcsin\left(\sqrt{\dfrac{4 - n^2}{3}}\right)}$.
6. Valeurs :
   — radiation rouge : $n(\lambda_r) = 1{,}331$ donc $i_m = 59{,}5°$, $r_m = 40{,}3°$ et $\boxed{D_m = 137{,}7°}$;
   — radiation violette :$n(\lambda_v) = 1{,}342$ donc $i_m = 58{,}9°$, $r_m = 39{,}7°$ et $\boxed{D_m = 139{,}2°}$.
7. Les rayons rouges sont les plus déviés, ils viennent de plus haut quand ils arrivent dans notre œil.