Sup MPSI, Lycée Jean Perrin, 16 Janvier 2026.

DS 5, Durée 2h30, calculatrices et téléphones interdits.

Dans tous les exercices, on sera particulièrement attentif et on précisera le domaine des calculs faits.

Exercice 1

Si $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

1. Montrer que la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante.
2. En utilisant une intégrale ou par étude de fonctions, montrer que pour tout $x > 0$:
$$\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$$
3. En déduire que si $n \in \mathbb{N}^*$ alors
$$\ln(n+1) < H_n < \ln(n) + 1$$
4. Déterminer la limite de la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
5. Déterminer la limite de la suite $\left(\frac{H_n}{\ln(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*-\{1\}}$.
6. Montrer que les suites $(u_n = H_n - \ln(n))$, $(v_n = H_n - \ln(n+1))$ définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ sont adjacentes et strictement positives.
7. Conclure qu'il existe un réel strictement positif noté γ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\ln(n) + \gamma < H_n < \ln(n+1) + \gamma$$

Exercice 2

On considère une fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ continue et vérifiant, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f\left(\frac{x^2+16}{2x}\right) = f(x)$$

On considère, par ailleurs la fonction $g(x) = \frac{x^2+16}{2x}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et les suites (u_n) définies par

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ \text{Si } u_n \text{ est bien défini et } u_n > 0 \text{ alors } u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$$

1. Étudier la fonction g ainsi que le signe de l'expression $g(x) - x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. En déduire que les intervalles $\mathbb{R}_+^*$ et $[4, +\infty[$ sont stables par g et les suites (u_n) bien définies sur $\mathbb{N}$.
3. Si $u_0 > 4$, montrer que $u_n \to 4$ pour $n \to +\infty$.
4. En déduire que $f(u_0) = f(4)$.

5. Montrer que si $u_0 \in]0, 4[$: $f(u_0) = f(4)$.
6. Que peut-on dire en conclusion de la fonction f ?

Exercice 3

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est un **morphisme continu** quand elle est continue et que, si pour tout x et y réels :

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

On dit que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifie l'**équation de Jensen** quand elle est continue et que, pour tout x et y réels :

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

On dit que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifie l'**équation de Cauchy** quand elle est continue et que, pour tout x et y réels :

$$f(x+y) = f(x) \times f(y)$$

1. On considère ici un morphisme continu f et on note $a = f(1) \in \mathbb{R}$.
   (a) Déterminer $f(0)$.
   (b) Montrer que si $n \in \mathbb{N}$: $f(n) = an$.
   (c) Montrer que si $n \in \mathbb{Z}$: $f(n) = an$.
   (d) Montrer que si $r \in \mathbb{Q}$: $f(r) = ar$.
   (e) Montrer que si $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = ax$ (*on pourra utiliser la densité des rationnels dans les réels*).
2. Quel est l'ensemble des morphismes continus de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?
3. On considère ici une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et vérifiant l'équation de Jensen
   (a) Montrer que si x et y sont réels alors $f(x+y) = f(x) + f(y) - f(0)$.
   (b) Montrer que la fonction $g : x \to f(x) - f(0)$ est un morphisme continu de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
4. Quel est l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation de Jensen ?
5. On considère une fonction f vérifiant l'équation de Cauchy.
   (a) Montrer que $f(0) = 1$ ou que f est la fonction nulle.
   (b) On suppose maintenant que f n'est pas la fonction nulle sur $\mathbb{R}$
      i. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) > 0$.
      ii. Montrer que $\ln(f)$ est un morphisme continu de $\mathbb{R}$.
6. Quel est l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation de Cauchy ?