Sup MPSI, Lycée Jean Perrin, 16 Janvier 2026.

DS 5, Durée 2h30, calculatrices et téléphones interdits.

Dans tous les exercices, on sera particulièrement attentif et on précisera le domaine des calculs faits.

Exercice 1

Si $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

1. $H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n+1} > 0$: $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite strictement croissante.
2. Pour tout $x > 0$ (par exemple) :
$$\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) = \int_{t=x}^{t=x+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{x}$$
3. Si $n \in \mathbb{N}^*$ en sommant les inégalités précédentes pour $k = 1$ ... $k = n$. alors
$$\ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$$
L'inégalité stricte à droite est fausse pour $n = 1$
4. $H_n \to \infty$.
5. $$\frac{H_n}{\ln(n)} \to 1$$
6. $v_1 = \ln(2) - 1 > 0$
$u_n - v_n \to 0^+$
$u_{n+1} - u_n = 1/(n+1) - \ln(n+1) + \ln(n) < 0$
$v_{n+1} - v_n = 1/(n+1) - \ln(n+2) + \ln(n+1) > 0$
Les suites $(u_n = H_n - \ln(n))$, $(v_n = H_n - \ln(n+1))$ définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ sont adjacentes et strictement positives. Elles tendent vers un réel $\gamma > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n < \gamma < u_n$.
7. Il existe un réel strictement positif noté γ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\ln(n) + \gamma < H_n < \ln(n+1) + \gamma$$

Exercice 2

On considère une fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ continue et vérifiant, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f\left(\frac{x^2+16}{2x}\right) = f(x)$$

On considère, par ailleurs la fonction $g(x) = \frac{x^2+16}{2x}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et les suites (u_n) définies par

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ \text{Si } u_n \text{ est bien défini et } u_n > 0 \text{ alors } u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$$

1. La fonction g est décroissante sur $]0,4]$, croissante sur $[4,+\infty[$ $g(4)=4$ $g(x)-x$ est positif sur $]0,4]$, négatif sur $[4,+\infty[$.
2. Par suite les intervalles $\mathbb{R}_+^*$ (sur lequel g est définie et $[4,+\infty[$ sont stables par g et les suites (u_n) bien définies sur $\mathbb{N}$.
3. Par le méthodes vues en classe : si $u_0>4$, montrer que $u_n \to 4$ pour $n \to +\infty$.
4. Par continuité : $f(u_0)=f(u_n)=f(4)$.
5. De même si $u_0 \in]0,4[$: $f(u_0)=f(4)$.
6. La fonction f est constante.

Exercice 3

On dit qu'une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est un **morphisme continu** quand elle est continue et que, si pour tout x et y réels :

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

On dit que la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ vérifie l'**équation de Jensen** quand elle est continue et que, pour tout x et y réels :

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2}$$

On dit que la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ vérifie l'**équation de Cauchy** quand elle est continue et que, pour tout x et y réels :

$$f(x+y)=f(x)\times f(y)$$

1. On considère ici un morphisme continu f et on note $a=f(1)\in\mathbb{R}$.
   (a) $2f(0)=f(0)$ donc $f(0)=0$.
   (b) Par récurrence : si $n\in\mathbb{N}$: $f(n)=an$.
   (c) Etant donné que (si $n\in\mathbb{N}$:) $f(-n)=-f(n)$: si $n\in\mathbb{Z}$: $f(n)=an$.
   (d) Si $r\in\mathbb{Q}$ (fait en classe) : $f(r)=ar$.
   (e) Par continuité $x\in\mathbb{R}$: $f(x)=ax$.
2. L'ensemble des morphismes continus de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est l'ensemble des fonctions linéaires.
3. On considère ici une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue et vérifiant l'équation de Jensen
   (a) Si x et y sont réels alors $\frac{x+y+0}{2}=\frac{x+y}{2}$ donc $\frac{f(x+y)+f(0)}{2}=\frac{f(x)+f(y)}{2}=f\left(\frac{x+y}{2}\right)$:
   $$f(x+y)=f(x)+f(y)-f(0)$$
   (b) Ainsi la fonction $g:x\to f(x)-f(0)$ vérifie (x et y dans $\mathbb{R}^2$) :
   $g(x+y)=f(x+y)-f(0)=f(x)+f(y)-2f(0)=g(x)+g(y)$
   g est donc un morphisme continu de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: c'est une fonction linéaire. f est une fonction affine.
4. La vérification fonctionne. L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation de Jensen est l'ensemble des fonctions affines.
5. On considère une fonction f vérifiant l'équation de Cauchy.
   (a) On a $f(0)^2=f(0)$ donc $f(0)=0$ ou 1.
   Si $f(0)=0$ alors ff est la fonction nulle.
   (b) On suppose maintenant que f n'est pas la fonction nulle sur $\mathbb{R}$

i. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) = f(x/2)^2$ donc $f(x) \geq 0$.
Si pour un certain $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = 0$ alors pour tout $y \in \mathbb{R}$: $f(y) = f(y - x).f(x) = 0$ donc f est la fonction nulle.
Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) > 0$.

ii. Dans ce cas : $\ln(f)$ est un morphisme continu de $\mathbb{R}$: une fonction linéaire.

6. L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation de Cauchy est l'ensemble formé par la fonction nulle et toutes les fonctions $x \to \exp(ax)$.