

## Fiche 42 : TD du 22-01.

### Exercice 1

Montrer que les vecteurs  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$  forment une base de  $\mathbb{R}^3$ . Calculer les coordonnées respectives des vecteurs  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  dans cette base.

### Exercice 2

Soient dans  $\mathbb{R}^4$  les vecteurs  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$  et  $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ .

Peut-on déterminer  $x$  et  $y$  pour que  $\begin{pmatrix} x \\ 1 \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Vect}\{v_1, v_2\}$ ? Et pour que  $\begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 1 \\ y \end{pmatrix} \in \text{Vect}\{v_1, v_2\}$ ?

### Exercice 3

Dans  $\mathbb{R}^4$  on considère l'ensemble  $E$  des vecteurs  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$  vérifiant  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ . L'ensemble  $E$  est-il un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$ ? Si oui, en donner une base.

### Exercice 4

Soit  $(\Sigma)$  le système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 0 \\ x + y + z + t = 0 \\ x - t = 0 \end{cases}$$

Montrer que l'ensemble des solutions de  $(\Sigma)$  forme un sous-espace vectoriel  $F$  de  $\mathbb{R}^4$ . Déterminer la dimension et une base de  $F$ .

### Exercice 5

Soient  $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $e_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  des vecteurs de  $\mathbb{R}^4$ .

Posons  $F = \text{Vect}\{e_1, e_2\}, G = \text{Vect}\{e_3, e_4\}, G' = \text{Vect}\{e_3, e_4, e_5\}$ .

Montrer que  $E = F \oplus G$  et  $E \neq F \oplus G'$ .

### Exercice 6

Dans l'espace  $\mathcal{P}_5$  des polynômes de degré  $\leq 5$ , on définit les sous-ensembles :

$$E_1 = \{P \in \mathcal{P}_5 \mid P(0) = 0\}$$

$$E_2 = \{P \in \mathcal{P}_5 \mid P'(1) = 0\}$$

$$E_3 = \{P \in \mathcal{P}_5 \mid x^2 + 1 \text{ divise } P\}$$

$$E_4 = \{P \in \mathcal{P}_5 \mid x \mapsto P(x) \text{ est une fonction paire}\}$$

$$E_5 = \{P \in \mathcal{P}_5 \mid \forall x, P(x) = xP'(x)\}.$$

- Déterminer des bases des sous-espaces vectoriels  $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_1 \cap E_2, E_1 \cap E_3, E_1 \cap E_2 \cap E_3, E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4$ .
- Déterminer dans  $\mathcal{P}_5$  des sous-espaces supplémentaires de  $E_4$  et de  $E_1 \cap E_3$ .