

Fiche 43 : Espaces vectoriels.

Exercice 1

Pour $k = 2, 3, 4$ montrer que V_k est un s.e.v. de \mathbb{C}^k , et en donner une base :

$$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 / a + ib = 0 \right\}, V_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 / a + 2b + 3c = 0 \right\},$$
$$V_4 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4 / a + ib = b + ic = c + id \right\}.$$

Exercice 2

On se place dans $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur \mathbb{R} .

On note : \mathcal{I} l'ensemble des fonctions de E qui sont impaires sur \mathbb{R} ; \mathcal{P} l'ensemble des fonctions de E qui sont paires sur \mathbb{R} .

1. Montrer que \mathcal{I} et \mathcal{P} sont des sous espaces vectoriels de E .
2. Montrer que $E = \mathcal{I} \oplus \mathcal{P}$.
3. Décomposer les fonctions \exp et $x \mapsto \frac{1}{x^2+x+1}$ suivant cette somme directe.

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré $\leq n$.

1. Soit $\beta = (P_0, P_1, \dots, P_n)$ un système de $(n+1)$ polynômes tels que, $\forall k, 0 \leq k \leq n, \deg P_k = k$. Montrer que β est une base de E .
2. Soit P un polynôme de degré n . Montrer que : $\gamma = (P, P', \dots, P^{(n)})$ est une base de E et déterminer les composantes du polynôme Q défini par : $Q(X) = P(X+a)$, (a réel fixé), dans la base γ .
3. Démontrer que le système $S = (X^k(1-X)^{n-k})_{0 \leq k \leq n}$ est une base de E , et déterminer, pour tout $p \in \{0, 1, \dots, n\}$, les composantes du polynôme X^p dans la base S .
4. Soit $a_0 < a_1 < \dots < a_n$ des réels et L_0, \dots, L_n les polynômes interpolateurs de Lagrange associés (on rappelle que $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$). Sans utiliser le théorème de Lagrange, montrer que (L_0, \dots, L_n) est une famille libre puis une base de E .