Chapitre 13 : Dérivation.

Plan

1 Dérivée d'une fonction

On considère une fonction réelle f définie sur un intervalle I et a un point I. On rappelle :

Définition 1 *La fonction f est dite **dérivable en** a et a pour **nombre dérivé** $f'(a)$ quand :*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

Le nombre dérivé $f'(a)$ est aussi noté (surtout en physique) :

$$f'(a) = Df(a) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}(a)$$

Remarquons qu'une fonction dérivable en un point a y est continue et que dans ce cas la droite d'équation :

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

est la tangente à la courbe représentative de f en $x = a$.

Plus précisément :

Propriété 1 *La fonction f est dérivable en a si et seulement si :*

$$f(a+h) = f(a) + h.f'(a) + h.\epsilon(h)$$

où ϵ est une fonction définie au voinage de 0 *et tendant vers 0 en 0 :* $\epsilon(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$

Au passage, rappels :

$\frac{\sin(x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$
$\frac{\text{sh}(x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$
$\frac{\tan(x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$
$\frac{\text{th}(x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$
$\frac{\arcsin(x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$
$\frac{\arctan(x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$
$\frac{\exp(x)-1}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$
$\frac{(1+x)^\alpha-1}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$

Si la limite $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe à droite (resp. à gauche), on dit que la fonction f est **dérivable à droite (resp. à gauche)** en a et on pose, quand les termes existent :

$$f'_d(a) = \lim_{x\to a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad f'_g(a) = \lim_{x\to a-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$f'_d(a)$, s'il existe est le **nombre dérivé à droite** de f en a.
$f'_g(a)$, s'il existe est le **nombre dérivé à gauche** de f en a.

Une fonction est dérivable en un point a qui n'est pas une extrémité de I si et seulement si elle y est dérivable à droite et à gauche et si $f'_d(a) = f'_g(a)$.

Propriété 2 *Si f et g sont dérivables en un point a alors les fonctions $f+g$, λf et $f.g$ sont dérivables en a avec les règles opératoires suivantes :*

- $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
- $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$
- $(f.g)'(a) = f'(a).g(a) + g(a).f'(a)$

Si f et g sont dérivables en a, et si $g(a) \neq 0$ alors $\dfrac{f}{g}$ et $\dfrac{1}{g}$ sont dérivables en a et :

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a).g(a) - g'(a).f(a)}{g^2(a)}$$

Concernant les fonctions composées, on montre :

Théorème 1 *Si f est une fonction dérivable en a et si g est une fonction dérivable en $f(a)$ alors $g \circ f$ est dérivable en a et :*

$$(g \circ f)'(a) = f'(a).g'(f(a))$$

formule souvent notée :

$$\frac{d(g(f(x))}{dx}(a) = \frac{df(x)}{dx}(a).\frac{dg(y)}{dy}(f(a))$$

en "pensant" : $y = f(x)$.

On considère une fonction f continue sur un intervalle I.

Définition 2 *Si la fonction f est dérivable en tout en point de I, on obtient une fonction :*

$$f' \begin{cases} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f'(x) = \dfrac{df}{dx}(x) \end{cases}$$

qui est appelée la ***fonction dérivée*** *de f.*

On rappelle le tableau de dérivées suivant (u est une fonction dérivable).

Fonction f	Dérivée f'	Domaine de validité
x^n	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{Z}$
u^n	$nu'u^{n-1}$	
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha \in \mathbb{R}$,$x > 0$
u^α	$u'\alpha u^{\alpha-1}$	$\alpha \in \mathbb{R}$,$u > 0$
u^{-1}	$\dfrac{1}{u'(u^{-1})}$	$u' \neq 0$
e^x	e^x	
e^u	$u'e^u$	
$\ln(\|x\|)$	$\dfrac{1}{x}$	$x \neq 0$
$\ln(u)$	$\dfrac{u'}{u}$	$u > 0$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	
$\sin(x)$	$\cos(x)$	
$\tan(x)$	$1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$\mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + k.\pi/k \in \mathbb{Z}\right\}$
$\arccos(x)$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-1 < x < 1$
$\arcsin(x)$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-1 < x < 1$
$\arctan(x)$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	

2 Étude des fonctions dérivables

2.1 Points critiques

On considère ici une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I et a un point situé à l'**intérieur** (pas au bord) de I.

Rappelons que f admet un extremum (resp. maximum, resp. minimum) **local** en a s'il existe un intervalle ouvert J contenant a et tel que f_J admette un extremum (resp. maximum, resp. minimum) en a.

Définition 3 *On dit le point a est un* ***point critique*** *de f quand :*

$$f'(a) = 0$$

La propriété associée est la suivante :

Propriété 3 *Si f admet un extremum local au point a alors a est point critique de f.*

Attention : le maximum d'une fonction, s'il est atteint au bord de l'intervalle de définition, ne correspond pas forcément à un point critique. D'autre part, la réciproque à la propriété précédente est clairement fausse.

2.2 Variations

On considère une fonction réelle f continue sur un intervalle $[a, b]$ (a et b réels) et dérivable sur $]a, b[$.

Théorème 2 (Théorème de Rolle) *Si $f(a) = f(b)$ alors il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que : $f'(x_0) = 0$*

On en déduit, dans le cas général :

Théorème 3 (Égalité des accroissements finis) *Si f est continue sur $[a, b]$ ($a < b$) et dérivable sur $]a, b[$, il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que :*

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

On obtient comme corolaire :

Théorème 4 (Inégalité des accroissements finis) *Si f est continue sur $[a, b]$ ($a < b$) et dérivable sur $]a, b[$, et si, pour tout $x \in]a, b[$:*

$$m \leq f'(x) \leq M$$

alors :

$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a).$$

Si f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, et si, pour tout $x \in]a,b[$:

$$|f'(x)| \leq M$$

alors :

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b-a|$$

Il suit, pour ce qui concerne les études de fonctions, les résultats bien connus.

Propriété 4 *Si f est continue sur $[a,b]$ $(a < b)$ et dérivable sur $]a,b[$, et si, pour tout $x \in]a,b[$:*

- *$f'(x) = 0$ alors f est constante sur $[a,b]$ (réciproque vraie) ;*
- *$f'(x) \geq 0$ alors f est croissante sur $[a,b]$ (réciproque vraie) ;*
- *$f'(x) \leq 0$ alors f est décroissante sur $[a,b]$ (réciproque vraie) ;*
- *$f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur $[a,b]$ (réciproque fausse) ;*
- *$f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur $[a,b]$ (réciproque fausse).*

L'équivalent du théorème de prolongement par continuité est donné par le résultat suivant.

Théorème 5 *Si une fonction f est continue sur I, dérivable sur $I - a$ où I est un intervalle et a est un point de I et si :*

$$\lim_{x \to a} f'(x) = l$$

(l fini ou infini) alors :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$$

Si de plus l est réel alors f est dérivable en a avec $f'(a) = l$ et f' est continue en a.

Le théorème de la bijection peut se reformuler dans ce contexte :

Théorème 6 (Théorème de la bijection dérivable) *Soit $I =]a,b[$ un intervalle réel et f une fonction dérivable sur I avec $f' > 0$ (ou $f' > 0$) sur I alors f est une bijection de I sur $f(I)$.*

Sa réciproque g est dérivable et pour tout y de $f(I)$:

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$$

3 Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

On considère une fonction réelle f définie sur un intervalle I.

On dit que la fonction f est de **de classe** $\mathcal{C}^1$ sur I si elle est dérivable et si f' est continue sur I. On note $\mathcal{C}^1(I)$ l'ensemble des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I.

En remarquant que les fonctions constantes sont de classe $\mathcal{C}^1$, on montre que l'ensemble $\mathcal{C}^1(I)$ est un espace vectoriel, plus précisément un sous espace de $\mathcal{C}(I)$, aussi noté $\mathcal{C}^0(I)$, espace vectoriel des fonctions continues sur I.

Si f' est elle même de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, on pose $f^{(2)} = (f')'$ (**fonction dérivée seconde** de f) et on dit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I. Plus généralement, par récurrence :

Définition 4 *Soit n un entier ($n > 0$), on dit qu'une fonction f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I si f' est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ sur I et on pose :*

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})' = (f')^{(n-1)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{(n-1)}$$

*$f^{(n)}$ est la **dérivée n-ième** de la fonction f.*

On note aussi :

$$f^{(n)}(x) = D^n f(x) = \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}(x)$$

L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I est noté $\mathcal{C}^n(I)$. Les règles classiques sur la dérivation font que $\mathcal{C}^n(I)$ est un espace vectoriel, plus précisément un sous espace de $\mathcal{C}^{(n-1)}(I)$.

Si une fonction f est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$ alors on dit de f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I est noté $\mathcal{C}^\infty(I)$. $\mathcal{C}^\infty(I)$ est un espace vectoriel. Plus précisément, on obtient les inclusions d'espaces vectoriels :

$$\mathbb{R}[x] \subset \mathcal{C}^\infty(I) \subset \ldots \mathcal{C}^n(I) \subset \mathcal{C}^{n-1}(I) \subset \cdots \subset \mathcal{C}^1(I) \subset \mathcal{C}(I) \subset \mathbb{R}^I$$

ainsi que les application linéaires :

$$D \begin{cases} \mathcal{C}^n(I) \to \mathcal{C}^{n-1}(I) \\ f \mapsto f' \end{cases} \quad \text{et} \quad D^n \begin{cases} \mathcal{C}^n(I) \to \mathcal{C}^0(I) \\ f \mapsto f^{(n)} \end{cases}$$

$$D \begin{cases} \mathcal{C}^\infty(I) \to \mathcal{C}^\infty(I) \\ f \mapsto f' \end{cases} \quad \text{et} \quad D^n \begin{cases} \mathcal{C}^\infty(I) \to \mathcal{C}^\infty(I) \\ f \mapsto f^{(n)} \end{cases}$$

Ainsi, on a les règles opératoires :

Propriété 5 *Si n est un entier, f et g de classe $\mathcal{C}^n$ au moins :*

- $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$,
- $(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}$

Concernant le produit, on obtient :

Théorème 7 (Formule de Leibniz) *Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I alors $f.g$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et*

$$D^n(f.g) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} f = (f \cdot g)^{(n)} = f^{(n)} \cdot g + \binom{n}{1} f^{(n-1)} \cdot g' + \cdots + \binom{n}{n-1} f' \cdot g^{(n-1)} + f \cdot g^{(n)}$$

$$D^n(f.g) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} f = (f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}$$

Les fonctions "classiques" sont de classe C^∞ sur leurs domaines de définitions respectifs sauf éventuellement en quelques points (les fonctions puissances x^α avec $0 < \alpha < 1$ en 0, arcsin en ± 1...).

Enfin concernant les composées et réciproques (n est un entier ou ∞) :

Théorème 8 *Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^n$ sur des intervalles I et J respectivement avec $g(J) \subset I$ alors $f \circ g$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur J.*

Si $f : I \to J$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, bijective et si f' ne s'annule pas sur I alors sa réciproque $f^{-1} : J \to I$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur J.

L'analogue du théorème de prolongement par continuité est donné par les résultats suivants.

Théorème 9 *Soit une fonction réelle continue sur un intervalle $I \ni a$.*

Si f est de classe $\mathcal{C}^k$ ($k \in \mathbb{N}^* \cup \infty$) sur $I - a$ et si pour tout i entier $1 \leq i \leq k$: $f^{(i)}(x)$ a une limite finie en a : $l_i \in \mathbb{R}$ alors f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et, pour tout i entier $0 \leq i \leq k$: $f^{(i)}(a) = l_i$

Conséquence :

Théorème 10 (Théorème de prolongement des fonctions $\mathcal{C}^k$) *Soit une fonction réelle définie sur un intervalle $I \ni a$.*

Si f est de classe $\mathcal{C}^k$ ($k \in \mathbb{N} \cup \infty$) sur $I - a$ et si pour tout i entier $0 \leq i \leq k$: $f^{(i)}(x)$ a une limite finie en a : $l_i \in \mathbb{R}$ alors f se prolonge en une fonction classe $\mathcal{C}^k$ sur I et, pour tout i entier $0 \leq i \leq k$: $f^{(i)}(a) = l_i \in \mathbb{R}$

4 Fonctions complexes

Rappelons que si $f \begin{cases} I \to \mathbb{C} \\ x \mapsto f(x) = \mathrm{Re}(f)(x) + i \cdot \mathrm{Im}(f)(x) \end{cases}$ est une fonction à valeurs complexes alors f est dérivable sur I si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont dérivable sur I et dans ce cas, si $x \in I$:

$$f'(x) = \mathrm{Re}(f)'(x) + i \cdot \mathrm{Im}(f)'(x)$$

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont. Les règles algébriques de dérivation de base : somme, produit, quotient, composition se généralisent sans difficulté aux fonctions à valeurs complexes de même la plupart des résultats de ce chapitre.

Attention par contre les résultats liés à l'ordre ne passent pas, en particulier le théorème de Rolle ! Par contre, on a :

Théorème 11 (Inégalité des accroissements finis) *Si f à valeurs complexes et continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, et si, pour tout $x \in]a, b[$:*

$$|f'(x)| \leq M$$

alors :

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$$

et

Théorème 12 (Théorème de prolongement des fonctions $\mathcal{C}^k$) *Soit une fonction complexe définie sur un intervalle $I \ni a$.*

Si f est de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \in \mathbb{N} \cup \infty)$ sur $I - a$ et si pour tout i entier $0 \leq i \leq k$: $f^{(i)}(x)$ a une limite finie en a : $l_i \in \mathbb{C}$ alors f se prolonge en une fonction classe $\mathcal{C}^k$ sur I et, pour tout i entier $0 \leq i \leq k$: $f^{(i)}(a) = l_i$

Savoirs et savoirs faire indispensables

Savoir

Tableau des dérivées, théorèmes fondamentaux sur les fonctions dérivables, théorème de prolongement des fonctions dérivables.

Savoir faire

Études de fonctions simples.