

Fiche 44 : Espaces vectoriels.

Exercice 1

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ on pose $f_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto e^{\alpha x}$.
Montrer que la famille $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ est libre.

Exercice 2

Donner la dimension du sous-espace F de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendré par :

$$f_1 = x \rightarrow \sin^2(x), f_2 = x \rightarrow \cos^2(x), f_3 = x \rightarrow \sin(2x), f_4 = x \rightarrow \cos(2x)$$

Exercice 3

Soit $E = \Delta^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions dérivables et $F = \{f \in E \mid f(0) = f'(0) = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et déterminer un supplémentaire de F dans E .

Exercice 4

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ (polynômes de degré $\leq n$), et $P \in E$.

1. Montrer que l'ensemble F_P des polynômes de E multiples de P est un sous-espace vectoriel de E . Quelle en est la dimension en fonction du degré de P ?
2. Soit $Q \in E$ un polynôme premier avec P , et tel que $\deg P + \deg Q = n + 1$. Montrer que $E = F_P \oplus F_Q$.
3. En déduire qu'il existe deux polynômes U et V de E tels que $UP + VQ = 1$.

Exercice 5

Soit $A = \{P \in \mathbb{R}[X] \text{ tq } P = (1 - X)Q(X^2) \text{ avec } Q \in \mathbb{R}[X]\}$.

Montrer que A est un \mathbb{R} -espace vectoriel et que l'on a :

$$\mathbb{R}[X] = A \oplus \{ \text{polynômes pairs} \}$$

A-t-on $\mathbb{R}[X] = A \oplus \{ \text{polynômes impairs} \}$?

Exercice 6

Soient F , G et H trois sous-espaces d'un espace vectoriel E de dimension finie sur \mathbb{K} .
Montrer que :

$$\dim(F + G + H) \leq \dim F + \dim G + \dim H - \dim(F \cap G) - \dim(G \cap H) - \dim(H \cap F) + \dim(F \cap G \cap H)$$

Trouver un exemple où l'inégalité est stricte.