Fiche 45 : Fonctions dérivables.

Exercice 1

On rappelle la limite classique pour $x \to 0$: $\frac{\sin(x)}{x} \to 1$.

La fonction $x \to \cos(\sqrt{|x|})$ est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 2

On considère la fonction $f(x) = \exp(-1/x)$ définie pour $x > 0$.

1. Montrer qu'il existe une suite de polynômes réels $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$:
$$f^{(n)}(x) = P_n(1/x)f(x)$$
En déduire que f peut être prolongée en une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$ en posant pour $x \leq 0$ $f(x) = 0$.
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$x \to \begin{cases} 0 \text{ si } x \geq 1 \text{ ou } x \leq 0 \\ \exp\left(\frac{-1}{x(1-x)}\right) \text{ si } 0 < x < 1 \end{cases}$$
Montrer que g est une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples. Montrer qu'il en est de même de P'.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il en est de même de P'.
On pourra utiliser le théorème de Rolle

Exercice 4

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$, 2 fois dérivable sur $]a, b[$ et tel que si $x \in]a, b[$: $f''(x) \geq 0$ (*autrement dit, f est une fonction* ***convexe***).

1. Montrer que si $f(a) = f(b) = 0$ alors $f \leq 0$ sur $[a, b]$.
2. Montrer plus généralement que pour $t \in [0, 1]$: $f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$.
Comment cela se "voit"-t-il sur le graphique de f ?

Exercice 5

Dans l'application de l'égalité des accroissements finis à la fonction
$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$
sur l'intervalle $[a, b]$ (a et b réels), on montre qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que : $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Préciser le nombre c de $]a, b[$.

Donner une interprétation géométrique.

Exercice 6

On s'intéresse à la réciproque de l'exercice précédent.
On considère une fonction $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout a et b réels :
$$f(b) - f(a) = f'\left(\frac{a+b}{2}\right)(b - a)$$
Montrer que pour tout a et b réels : $f''(a) = f''(b)$ et en déduire que f est une fonction polynômiale de degré au plus 2.