

## Fiche 45 : Fonctions dérivables.

### Exercice 1

On rappelle la limite classique pour  $x \rightarrow 0 : \frac{\sin(x)}{x} \rightarrow 0$ .

La fonction  $x \rightarrow \cos(\sqrt{|x|})$  est-elle dérivable en 0 ?

### Exercice 2

1. Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  scindé sur  $\mathbb{R}$  à racines simples. Montrer qu'il en est de même de  $P'$ .
2. Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  scindé sur  $\mathbb{R}$ . Montrer qu'il en est de même de  $P'$ .

*On pourra utiliser le théorème de Rolle*

### Exercice 3

Soit  $f$  une fonction continue sur un segment  $[a, b]$ , 2 fois dérivable sur  $]a, b[$  et tel que si  $x \in ]a, b[ : f''(x) \geq 0$  (*autrement dit,  $f$  est une fonction **convexe***).

1. Montrer que si  $f(a) = f(b) = 0$  alors  $f \leq 0$  sur  $[a, b]$ .
2. Montrer plus généralement que pour  $t \in [0, 1] : f(ta + (1 - t)b) \leq tf(a) + (1 - t)f(b)$ .  
Comment cela se "voit"-il sur le graphique de  $f$  ?

### Exercice 4

Dans l'application de l'égalité des accroissements finis à la fonction

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

sur l'intervalle  $[a, b]$  ( $a$  et  $b$  réels), on montre qu'il existe  $c \in [a, b]$  tel que :  $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ .

Préciser le nombre  $c$  de  $]a, b[$ .

Donner une interprétation géométrique.

### Exercice 5

On s'intéresse à la réciproque de l'exercice précédent.

On considère une fonction  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$  telle que, pour tout  $a$  et  $b$  réels :

$$f(b) - f(a) = f' \left( \frac{a+b}{2} \right) (b - a)$$

Montrer que pour tout  $a$  et  $b$  réels :  $f''(a) = f''(b)$  et en déduire que  $f$  est une fonction polynômiale de degré au plus 2.

### Exercice 6

Pour  $n$  entier naturel non nul donné, on pose  $L_n = ((X^2 - 1)^n)^{(n)}$ .

1. Déterminer le degré et le coefficient dominant de  $L_n$ .
2. En étudiant le polynôme  $A_n = (X^2 - 1)^n$ , montrer que  $L_n$  admet  $n$  racines réelles simples et toutes dans  $] -1; 1[$ .