Sup MPSI, Lycée Jean Perrin, 2024-2025.

Fiche 46 : TD du 6-02.

Exercice 1

Soit $n \geq 2$ un entier fixé et $f : \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par la formule suivante :

$$f(x) = \frac{1+x^n}{(1+x)^n}, \quad x \geq 0.$$

1. Étudier la fonction f
2. En déduire l'inégalité suivante :
$$(1+x)^n \leq 2^{n-1}(1+x^n), \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$
3. Montrer que si $x \in \mathbb{R}^+$ et $y \in \mathbb{R}^+$ alors on a
$$(x+y)^n \leq 2^{n-1}(x^n+y^n).$$

Exercice 2

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x \text{ si } x < 0 \\ x \mapsto ax^2+bx+c \text{ sinon} \end{cases}$

Déterminer a, b, c pour que f soit C^2 (et C^3 ?).

Exercice 3

À l'aide de la formule de Leibnitz écrire les dérivées successives des fonctions :

$$x \mapsto x^2 e^x \quad ; \quad x \mapsto x^2(1+x)^n \quad ; \quad x \mapsto \frac{x^2+1}{(x+1)^2} \quad ; \quad x \mapsto x^{n-1}\ln x.$$

Exercice 4

Étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ des applications suivantes :

$$f : x \mapsto x|x|, \qquad g : x \mapsto \frac{x}{1+|x|}, \qquad h :\mapsto \frac{1}{1+|x|}.$$

Exercice 5

1. Montrer que la fonction définie par : $f : x \to \exp(-\frac{1}{2}x^2)$ est de classe C^∞ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme réel H_n, de degré n, tel que, pour tout x réel :
$$f^{(n)}(x) = (-1)^n f(x) H_n(x)$$
2. Soit f une fonction réelle dérivable sur l'intervalle : $[a, +\infty[$ telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = f(a)$ alors il existe $c \in]a, +\infty[$ telle que $f'(c) = 0$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, H_n est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $n \geq 2$, entre 2 racines consécutives de H_n, il existe une racine et une seule de H_{n-1}.

Indication : utiliser la question précédente.

Exercice 6

Soit f de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ vérifiant pour tout x réel, $(f \circ f)(x) = \frac{x}{2} + 3$. En remarquant que $f(\frac{x}{2}+3) = \frac{f(x)}{2} + 3$, montrer que f' est constante puis déterminer f.