

Fiche 46 : TD du 6-02.

Exercice 1

Pour tout $x \in]1, +\infty[$ on pose

$$f(x) = x \ln(x) - x$$

Montrer que f est une bijection de $]1, +\infty[$ sur $] -1, +\infty[$. On pose $g = f^{-1}$ l'application réciproque de f . Calculer $g(0)$ et $g'(0)$.

Exercice 2

$$\text{Soit } f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x \text{ si } x < 0 \\ x \mapsto ax^2 + bx + c \text{ sinon} \end{cases}$$

Déterminer a, b, c pour que f soit C^2 (et C^3 ?).

Exercice 3

À l'aide de la formule de Leibnitz écrire les dérivées successives des fonctions :

$$x \mapsto x^2 e^x \quad ; \quad x \mapsto x^2(1+x)^n \quad ; \quad x \mapsto \frac{x^2+1}{(x+1)^2} \quad ; \quad x \mapsto x^{n-1} \ln x.$$

Exercice 4

Étudier la dérivabilité sur \mathbb{R} des applications suivantes :

$$f : x \mapsto x|x|, \quad g : x \mapsto \frac{x}{1+|x|}, \quad h : x \mapsto \frac{1}{1+|x|}.$$

Exercice 5

Pour n entier naturel non nul donné, on pose $L_n = ((X^2 - 1)^n)^{(n)}$.

- Déterminer le degré et le coefficient dominant de L_n .
- En étudiant le polynôme $A_n = (X^2 - 1)^n$, montrer que L_n admet n racines réelles simples et toutes dans $] -1; 1[$.

Exercice 6

Soit f de classe C^1 sur \mathbb{R} vérifiant pour tout x réel, $(f \circ f)(x) = \frac{x}{2} + 3$. En remarquant que $f(\frac{x}{2} + 3) = \frac{f(x)}{2} + 3$, montrer que f' est constante puis déterminer f .