Chapitre 14 : Applications linéaires.

Plan

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (corps des *scalaires*) et on considèrera les espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

1 Applications linéaires

1.1 Définitions

Définition 1 *Si E et F sont 2 espaces vectoriels, et $f : E \to F$ est une application. On dit que f est une* ***application linéaire*** *(ou* ***application*** $\mathbb{K}$***-linéaire****) quand pour tous vecteurs u, v de E et $\lambda \in \mathbb{K}$:*

- $f(u+v) = f(u) + f(v)$ *et*
- $f(\lambda v) = \lambda f(v)$.

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.
On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans E.

Remarquons que si $f : E \to F$ est linéaire alors $f(0_E) = 0_F$.

Propriété 1 *Si f et g sont 2 applications linéaires de E dans F et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors :*

- $f + g$ *est une application linéaire de E dans F.*
- λf *est une application linéaire de E dans F.*

En remarquant que l'application nulle est linéaire, on obtient que $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel. De même, $\mathcal{L}(E)$ est un espace vectoriel.

Dans le cas où $E = F$, une application linéaire de E dans lui même s'appelle un **endomorphisme** de E.

L'application identité $Id_E : v \to v$ est un endomorphisme de E : $Id_E \in \mathcal{L}(E)$.

Si $\lambda \in \mathbb{K}$, l'application $\begin{cases} E \to E \\ v \to \lambda.v \end{cases}$ est un endomorphisme de E. C'est l'**homothétie** de rapport λ de E.

1.2 Composition des applications linéaires

Ici E, F et G sont des espaces vectoriels.

Théorème 1 *Dans les conditions précédentes, si* $f \in \mathcal{L}(E,F)$ *et* $g \in \mathcal{L}(F,G)$ *sont linéaires alors* $g \circ f$ *est linéaire :*

$$gf = g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$$

Si $f \in \mathcal{L}(E)$ *et* $g \in \mathcal{L}(E)$ *sont linéaires alors* $f \circ g$*,* $g \circ f$ *et* $f^2 = f \circ f$ *sont linéaires :*

$$f \circ g \in \mathcal{L}(E) \quad g \circ f \in \mathcal{L}(E) \quad f \circ f = f^2 \in \mathcal{L}(E)$$

On observe de plus les règles de calcul suivantes (f, g, h sont des applications linéaires telles que les compositions aient un sens, λ est un scalaire) :

- $f \circ (g+h) = f \circ g + f \circ h.$
- $(f+g) \circ h = f \circ h + g \circ h.$
- $f \circ (\lambda g) = \lambda(f \circ g)$
- $(\lambda.f) \circ (g) = \lambda(f \circ g)$

Ainsi l'ensemble $\mathcal{L}(E)$ muni de l'addition et de composition des endomorphismes est un anneau (d'éléments neutres l'application nulle pour l'addition et l'application identité pour le produit), non commutatif (pour ce qui concerne le produit) quand $\dim(E) \geq 2$.

1.3 Isomorphismes, automorphismes

Théorème 2 *Si* $f : E \to F$ *est linéaire et bijective alors* $f^{-1} : F \to E$ *est aussi linéaire. Dans ce cas, on dit que* f *est un* ***isomorphisme*** *entre* E *et* F*. On note* $\mathrm{Isom}(E,F)$ *l'ensemble des isomorphismes de* E *dans* F*. On a ainsi :* $f^{-1} \in \mathrm{Isom}(F,E)$*.*

Si $f : E \to E$ *est linéaire et bijective alors* $f^{-1} : E \to E$ *est aussi linéaire. Dans ce cas, on dit que* f *est un* ***automorphisme*** *de* E*. On note* $\mathrm{Aut}(E)$ *l'ensemble des automorphismes de* E*.* $\mathrm{Aut}(E)$ *s'appelle aussi le groupe linéaire de* E*. Pour cette raison il est aussi noté :* $\mathrm{GL}(E)$*. Notons au passage que* Id_E *est un automorphisme de* E*.*

En compilant les différents résultats, on obtient ainsi entre autres :

Théorème 3 *L'ensemble* $\mathrm{GL}(E)$ *est un groupe pour l'opération* $\circ$ *d'élément neutre* Id_E*.*

Les isomorphismes préservent les bases, on a même :

Propriété 2 *Si* $B = (e_i)_{i \in I}$ *est une base de* E *et si* f *est une application linéaire entre les espaces* E *et* F *alors la famille* $f(B) = (f(e_i))_{i \in I}$ *est une base de* E *si et seulement si* f *est un isomorphisme.*

1.4 Image, noyau

Soit E et F des espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F : $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Théorème 4 *L'ensemble :*

$$\mathrm{Im}(f) = f(E) = \{y = f(v) \in F / v \in E\}$$

*est un sous espace vectoriel de F appelé **image** de f.*
L'ensemble :

$$\mathrm{Ker}(f) = \{v \in E / f(v) = 0\}$$

*est un sous espace vectoriel de E appelé **noyau** de f.*

Plus généralement, si f est linéaire de E dans F et G est un sous espace de E alors $f(G) = \{f(x)/x \in G\}$ est un sous espace de F appelé **image** de G.

Si f est linéaire de E dans F et G est un sous espace de F alors $f^{-1}(G) = \{x \in E/f(x) \in G\}$ est un sous espace de E appelé **image réciproque** de G.

Ces notions seront très utiles dans la pratique. Une première application est la suivante.

Théorème 5 *Une application linéaire $f : E \to F$ est*

- *surjective si et seulement si* $\mathrm{Im}(f) = F$.
- *injective si et seulement si* $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.
- *un isomorphisme (un automorphisme si $E = F$) si et seulement si les 2 conditions précédentes sont réalisées.*

2 Projections et symétries

On considère E un espace vectoriel et F et G 2 sous espaces vectoriels supplémentaires dans E c'est à dire :

$$E = F \oplus G$$

Rappelons que dans ces conditions, si $u \in E$ alors on peut écrire de manière unique :

$$u = v + w$$

avec $v \in F$ et $w \in G$.

Avec les notation précédentes, on définit les applications suivantes :

$$p_F \begin{cases} E \to E \\ u = v + w \to p_F(u) = v \end{cases}$$

$$p_G \begin{cases} E \to E \\ u = v + w \to p_G(u) = w \end{cases}$$

$$s \begin{cases} E \to E \\ u = v + w \to s(u) = v - w \end{cases}$$

Définition 2 *p_F est un endomorphisme de E appelé* ***projection sur F parallèlement à** G. Il a pour image F et pour noyau G.*

p_G est un endomorphisme de E appelé ***projection sur G parallèlement à** F. Il a pour image G et pour noyau F.*

s est un automorphisme de E appelé ***symétrie par rapport à F parallèlement à** G.*

On a, si $x \in F$: $p_F(x) = x$, $p_G(x) = 0$, $s(x) = x$.

On a, si $x \in G$: $p_F(x) = 0$, $p_G(x) = x$, $s(x) = -x$.

Pour tout $x \in E$ $p_F(p_F(x)) = p_F(x)$ et $s(s(x)) = x$. On note :

$$p_F \circ p_F = p_F \quad s \circ s = Id_E$$

Le théorème suivant donne une réciproque à cette propriété :

Théorème 6 *Soit p un endomorphisme de E vérifiant $p \circ p = p$ alors p est une projection. Plus précisément, on a :*

$$\mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p) = E$$

et p est la projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.

On a un résultat analogue concernant les symétries :

Théorème 7 *Soit s un endomorphisme de E vérifiant $s \circ s = \mathrm{Id}_E$ alors s est une symetrie. Plus précisément, on a :*

$$\mathrm{Ker}(s - Id) \oplus \mathrm{Ker}(s + Id) = E$$

et s est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(s - Id)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + Id)$.

3 Rang d'une application linéaire

3.1 Applications linéaires et bases

On considère maintenant $B = (e_i)_{i\in I}$ une base d'un espace vectoriel E et $F = (f_i)_{i\in I}$ une famille indexée par I d'un espace vectoriel G.

Propriété 3 *Il existe une unique application linéaire $\phi_F\ : E \to G$ telle que : $\phi(e_i) = f_i$ pour tout $i \in I$. Son image est* $\mathrm{Vect}(F)$ *et :*

- *ϕ_F est surjective si et seulement si la famille F engendre G.*
- *ϕ_F est injective si et seulement la famille F est libre.*
- *ϕ_F est un isomorphisme si et seulement si la famille F est une base de G.*

On a aussi :

Si F est un espace vectoriel, si $E_1, \dots, E_n$ sont n sous espaces de E tels que $E = \oplus_{i=1}^n E_i$ et si pour tout $1 \leq i \leq n$, u_i est une application linéaire de E_i dans F alors il existe une unique application linéaire u de E dans F tel que pour tout $1 \leq i \leq n$: $u_i = u/E_i$.

Dans ce cas :

$$\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im}(u_n)$$

3.2 En dimension finie

On considère maintenant $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base d'un espace vectoriel E de dimension finie et $F = (f_1, \dots, f_n)$ une famille d'un espace vectoriel G.

Propriété 4 *Il existe une unique application linéaire $\phi_F\ : E \to G$ telle que :*

$$\phi(e_1) = f_1, \dots, \phi(e_n) = f_n$$

Son image est $\mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_n)$.
Son noyau est l'ensemble des $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ tel que $\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n = 0$.
En particulier :

- *ϕ_F est surjective si et seulement si la famille F engendre G.*
- *ϕ_F est injective si et seulement la famille F est libre.*
- *ϕ_F est un isomorphisme si et seulement si la famille F est une base de G.*

On obtient ainsi la propriété suivante :

Propriété 5 *Deux espaces E et F de dimensions finies sont isomorphes si et seulement si ils ont la même dimension.*

Enfin, concernant les espaces $\mathcal{L}(E, F)$:

Propriété 6 *Si E et F sont de dimension finie alors l'espace $\mathcal{L}(E,F)$ est de dimension finie et même :*

$$\dim(\mathcal{L}(E,F)) = \dim(E) \times \dim(F)$$
$$\dim(\mathcal{L}(E)) = \dim(E)^2$$

3.3 Théorème du rang

Soit $f\ : E \to F$ une application linéaire.

Définition 3 *On pose :*

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f))$$

$\mathrm{rg}(f)$ *qui est un entier ou $+\infty$ est le* ***rang*** *de l'application linéaire E. Il est fini si E ou F sont de dimensions finies.*

Première remarque :

Propriété 7 *Si $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$ sont des application linéaires alors :*

$$\mathrm{rg}(v \circ u) \leq \min(\mathrm{rg}(u), \mathrm{rg}(v))$$

On obtient ensuite l'importante **formule du rang**.

Théorème 8 (Théorème du rang) *Soit $f\ : E \to F$ une application linéaire avec E de dimension finie alors :*

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f)$$

3.4 Quelques applications

Première conséquence importante concernant les isomorphismes et les automorphismes :

Propriété 8 *Soit $f\ : E \to F$ une application linéaire avec E de dimension finie. f est un isomorphisme entre E et F si et seulement si* $\dim(E) = \dim(F)$ *et* $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$. *Autrement dit :*

$$\text{Si } \begin{cases} \dim(E) = \dim(F) \\ \mathrm{Ker}(f) = \{0\} \end{cases} \quad \text{alors : } f \in \mathrm{Isom}(E,F)$$

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme avec E de dimension finie.

f est un automorphisme de E si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.

Autrement dit :

$$\text{Si } \mathrm{Ker}(f) = \{0\} \text{ alors } f \text{ est un automosphisme.}$$

f est un automorphisme de E si et seulement si $\mathrm{rg}(f) = \dim(E)$. *Autrement dit :*

$$\text{Si } \mathrm{Im}(f) = E \text{ alors } f \text{ est un automosphisme.}$$

Concernant l'inversion :

Propriété 9 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ $g \in \mathcal{L}(E)$ des endomorphismes avec E de dimension finie. On a :*

$$\text{Si } f \circ g = Id_E \text{ alors } g \circ f = Id_E$$

Dans ce cas, f et g sont des automorphismes de E. Plus généralement, si $f \circ g$ ou $g \circ f$ est un automorphisme de E alors f et g sont des automorphismes de E.

4 Hyperplans et formes linéaires

On considère E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Définition 4 *Une forme linéaire sur E est une application linéaire u définie sur E à valeurs dans $\mathbb{K}$.*

Les formes linéaires sur E forment un espace vectoriel de dimension (éventuellement infinie) égale à celle de E.

On a des exemples "canoniques" :

Si E est de dimension finie et $B = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, alors pour tout $v \in E$, on peut écrire :

$$v = \lambda_1(v).e_1 + \cdots + \lambda_n(v).e_n$$

$\lambda_1(v), \ldots, \lambda_n(v)$ étant des scalaires.

Les applications $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des formes linéaires sur E dite **formes linéaires coordonnées** sur E. Elles forment une base de l'espace des formes linéaires sur E.

Définition 5 *Si H est un sous espace de E et s'il existe u une forme linéaire non nulle sur E telle que $H = \mathrm{Ker}(u)$ alors on dit que H est un* ***hyperplan*** *de E.*

On a des caractérisations des hyperplans de E :

Propriété 10 *Si H est un sous espace vectoriel de E alors H est un hyperplan de E si et seulement si :*

- *Il existe une droite vectorielle D telle que $E = D \oplus H$ ou,*
- *Si $\dim(E) < \infty$: $\dim(H) = \dim(E) - 1$.*

Notons du coup que les hyperplans de $\mathbb{R}^2$ sont les droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$ et les hyperplans de $\mathbb{R}^3$ sont les plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

En fait, si H est un hyperplan de E *toute* droite non incluse dans E est un supplémentaire de H.

On obtient du coup :

Propriété 11 *Si u et v sont 2 formes linéaires sur E telles que* $\ker(u) = \ker(v)$ *alors u et v sont proportionnelles.*

Si H est un hyperplan de E et si $H = \ker(u)$ avec u forme linéaire sur E, alors on dit que la relation $u(v) = 0$ qui caractérise donc les vecteurs de H est une **équation de** H.

On montre par récurrence que l'intersection de m hyperplans d'un espace E de dimension n est un sous espace de E de dimension au moins $n - m$.

Réciproquement :

Théorème 9 *Si E est un espace de dimension finie n, tout sous espace F de E de dimension $n - m$ est l'intersection de m hyperplans de E.*

Si on se donne des équations respectives de ces m hyperplans : $u_1(v) = 0$, ... , $u_m(v) = 0$ avec u_1, ... , u_m des formes linéaires sur E, celles ci sont indépendantes dans leur espace. On dit qu'on a défini F par m ***équations indépendantes****.*

Ici l'indépendance tient au fait que dans ce cas les formes linéaires u_1, ...,u_m forment une famille libre dans l'espace des formes linéaires sur E.

Dans le cas de $\mathbb{R}^3$, toute droite vectorielle peut ainsi être définie par 2 équation linéaires indépendantes.

5 Espaces affines

5.1 Notion d'espace affine

On considère un espace vectoriel E. C'est un espace de **vecteurs** dont le vecteur nul $\overrightarrow{0}$. C'est aussi un espace **affine** si on le considère comme un espace de **points** dont le point O.

Ici on distinguera donc les points (lettres capitales) des vecteurs.

A tout couple A, B de points est associé par différence un vecteur : $\overrightarrow{AB}$ avec les règles classiques entre autres :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$$

Définition 6 *Si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur de E, on lui associe une bijection de E espace affine :*

$$\begin{cases} E \to E \\ A \to A + \overrightarrow{u} = B \text{ avec } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u} \end{cases}$$

cette application est la ***translation de vecteur*** $\overrightarrow{u}$

On sera donc autorisé à utiliser la notation : $B - A = \overrightarrow{AB}$.

Définition 7 *On considère F une partie de E, on dit que F est un* ***sous espace affine*** *de E quand il existe un sous espace vectoriel $\overrightarrow{F}$ de E et un point A de E tel que*

$$F = A + \overrightarrow{F} = \{A + \overrightarrow{u} / \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{F}\}$$

On a alors $\overrightarrow{F} = \{\overrightarrow{AB} \in E / B \in F\}$, et pour tout $B \in F$: $A + \overrightarrow{F} = B + \overrightarrow{F}$.

Le sous espace $\overrightarrow{F}$ est appelé **espace directeur** ou **direction** de l'espace affine F.

L'intersection de plusieurs sous espaces affines de E, si elle est non vide, est un sous espace affine dirigé par un sous espace de l'intersection de leurs espaces directeurs.

Les sous espaces affines de $\mathbb{R}^2$ sont les points (dirigés par le vecteur nul) les droites affines de $\mathbb{R}^2$ (dirigées par les droites vectorielles) et $\mathbb{R}^2$ (dirigé par lui même !).

Les sous espaces affines de $\mathbb{R}^3$ sont les points (dirigés par le vecteur nul), les droites affines (dirigées par les droites vectorielles), les plans (dirigées par les plans vectoriels) et $\mathbb{R}^3$ (dirigé par lui même !).

Un **hyperplan affine** H est un sous espace affine de E dont l'espace directeur est un hyperplan de E. Il existe une forme linéaire non nulle sur E et un scalaire c tel que :

$$H = \{A \in E / u(A) = c\}$$

La relation $u(A) = c$ est une **équation affine** de H. Deux équations affines d'un même hyperplan affine sont proportionnelles.

5.2 Repère affine et coordonnées

On considère ici E de dimension finie et on en fixe une base $B = (\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_n})$. On fixe aussi un point O de E comme espace affine. On dit qu'on s'est alors donné un **repère affine** $\mathcal{R} = (O, B)$ de E.

Pour tout point M de E, il existe des scalaires (uniques) λ_1, ... , λ_n tels que :

$$M = O + \lambda_1 \overrightarrow{u_1} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{u_n}$$

C'est à dire :

$$\overrightarrow{OM} = \lambda_1 \overrightarrow{u_1} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{u_n}$$

On dit dans ce cas que M a pour **coordonnées affines** $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et on note (parfois) $M_{\mathcal{R}} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

6 Problèmes linéaires

Définition 8 *Soit E et F 2 espaces vectoriels, f une application linéaire de E dans F : $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et b un vecteur de F.*

*Une **équation linéaire** ou **problème linéaire** est un problème du type :*

$$(e): \ f(v) = b$$

d'inconnue $v \in E$.

*Il lui est associée l'**équation linéaire homogène** :*

$$(e_0): \ f(v) = 0$$

d'inconnue $v \in E$.

Dans les conditions précédentes :

Théorème 10 *L'équation linéaire homogène (e_0) a toujours au moins une solution : $v = 0$. L'ensemble de ses solutions est le sous espace vectoriel $\mathrm{Ker}(f)$ de E.*

L'équation $(e): \ f(v) = b$ a des solutions si et seulement si $b \in \Im(f)$. Si c'est le cas on considère v_1 une solution particulière : $f(v_1) = b$. L'ensemble des solutions est alors :

$$v_1 + \mathrm{Ker}(f) = \{v_1 + v_0 / f(v_0) = 0\}$$

C'est un sous espace affine de E dirigé par $\mathrm{Ker}(f)$.

Autrement dit, la solution générale de l'équation linéaire est obtenue en ajoutant à une solution particulière la solution générale de l'équation homogène.

Savoirs et savoirs faire indispensables

Savoirs

Définition d'application linéaire, d'isomorphisme, automorphisme. Image, Noyau.
Définition d'une famille libre, génératrice, d'une base.
Définition de projection et d'une symétrie, caractérisation.
Définition et théorème du rang d'une application linéaire.

Savoir-faire

Vérifier qu'une application est linéaire, est un isomorphisme.
Vérifier qu'une famille est libre, génératrice, est une base.
Calculer une image, un noyau, vérifier qu'une application est un isomorphisme à l'aide du théorème du rang, calculer sa réciproque.