

Fiche 47 : Applications linéaires.

Exercice 1

Étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction :

$$f \begin{cases} 0 \rightarrow 0 \\ x \rightarrow x^2 \sin(1/x) \text{ pour } x \neq 0 \end{cases}$$

La fonction f est-elle C^1 sur \mathbb{R} ?

Exercice 2

Parmi les applications suivantes, lesquelles sont des applications linéaires sur $\mathbb{R}[X]$ à valeurs dans \mathbb{R} , donner l'image et le noyau des applications qui sont linéaires :

$$P \mapsto P(0), \quad P \mapsto P(1) - 1, \quad P \mapsto P'(3), \quad P \mapsto (P'(2))^2, \quad P \mapsto \int_0^1 P(t) dt.$$

Exercice 3

Soit l'application $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par :

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y - z \\ 2x + y - 2z \\ x + 3y - z \end{pmatrix}$$

- Justifier que f est linéaire.
- (a) Déterminer une base et la dimension du noyau de f , noté $\ker f$.
(b) L'application f est-elle injective ?
- (a) Donner le rang de f et une base de $\text{Im} f$.
(b) L'application f est-elle surjective ?

Exercice 4

- Vérifier qu'il existe une unique application linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^2 vérifiant :

$$f \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ puis } f \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } f \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calculer $f \left(\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$ et $f \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right)$ en général.

- Déterminer $\text{Ker} f$. En fournir une base. Donner un supplémentaire de $\text{Ker} f$ dans \mathbb{R}^3 et vérifier qu'il est isomorphe à $\text{Im} f$.

Exercice 5

Soient, dans \mathbb{R}^3 , P le plan d'équation $z = x - y$ et D la droite d'équations $x = -y = z$, p la projection de \mathbb{R}^3 sur P parallèlement à D , q la projection de \mathbb{R}^3 sur D parallèlement à P .

Déterminer pour $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ quelconque, les coordonnées de $p(v)$.

Exercice 6

On considère l'application : $P : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{2y-x}{3} \\ \frac{4y-2x}{3} \end{pmatrix}$ de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 .

Montrer que P est un projecteur et identifier ses espaces propres : $\text{Im}(P)$ et $\text{Ker}(P)$.

Exercice 7

Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de \mathbb{R}^3 .

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 défini par :

$$\begin{cases} f(e_1) = 13e_1 + 12e_2 + 6e_3 \\ f(e_2) = -8e_1 - 7e_2 - 4e_3 \\ f(e_3) = -12e_1 - 12e_2 - 5e_3 \end{cases}$$

1. Montrer que f est une symétrie de \mathbb{R}^3 .
2. Identifier les espaces propres associés c'est à dire les espaces : $\text{Ker}(f - Id)$ et $\text{Ker}(f + Id)$.

Exercice 8

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, le \mathbb{R} -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n (n entier naturel donné). Soit φ l'application définie par :

$$\forall P \in E, \varphi(P) = P(X+1) - P(X)$$

1. Vérifier que φ est un endomorphisme de E .
2. Déterminer $\text{Ker}\varphi$ et $\text{Im}\varphi$.

Exercice 9

On considère l'espace complexe $E = \mathbb{C}^3$ muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3) et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$ défini par

$$f : \begin{cases} e_1 \rightarrow e_2 \\ e_2 \rightarrow e_3 \\ e_3 \rightarrow e_1 \end{cases}$$

1. Montrer sans calcul que f est un automorphisme de \mathbb{C}^3 et déterminer f^2 et f^{-1} .
2. Déterminer $F = \ker(f - Id)$, $G = \ker(f - jId)$, $H = \ker(f - j^2Id)$.
3. Montrer que $E = F \oplus G \oplus H$ et donner une base adaptée à la somme précédente.