

## Fiche 47 : Applications linéaires.

### Exercice 1

Étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction :

$$f \begin{cases} 0 \rightarrow 0 \\ x \rightarrow x^2 \sin(1/x) \text{ pour } x \neq 0 \end{cases}$$

La fonction  $f$  est-elle  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  ?

### Exercice 2

Parmi les applications suivantes, lesquelles sont des applications linéaires sur  $\mathbb{R}[X]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , donner l'image et le noyau des applications qui sont linéaires :

$$P \mapsto P(0), \quad P \mapsto P(1) - 1, \quad P \mapsto P'(3), \quad P \mapsto (P'(2))^2, \quad P \mapsto \int_0^1 P(t)dt.$$

### Exercice 3

Soit l'application  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  donnée par :

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y - z \\ 2x + y - 2z \\ x + 3y - z \end{pmatrix}$$

1. Justifier que  $f$  est linéaire.
2. (a) Déterminer une base et la dimension du noyau de  $f$ , noté  $\ker f$ .  
(b) L'application  $f$  est-elle injective ?
3. (a) Donner le rang de  $f$  et une base de  $\text{Im } f$ .  
(b) L'application  $f$  est-elle surjective ?

### Exercice 4

1. Vérifier qu'il existe une unique application linéaire de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^2$  vérifiant :

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ puis } f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calculer  $f \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$  et  $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  en général.

2. Déterminer  $\text{Ker } f$ . En fournir une base. Donner un supplémentaire de  $\text{Ker } f$  dans  $\mathbb{R}^3$  et vérifier qu'il est isomorphe à  $\text{Im } f$ .

### Exercice 5

Soient, dans  $\mathbb{R}^3$ ,  $P$  le plan d'équation  $z = x - y$  et  $D$  la droite d'équations  $x = -y = z$ ,  $p$  la projection de  $\mathbb{R}^3$  sur  $P$  parallèlement à  $D$ ,  $q$  la projection de  $\mathbb{R}^3$  sur  $D$  parallèlement à  $P$ .

Déterminer pour  $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$  quelconque, les coordonnées de  $p(v)$ .

### Exercice 6

On considère l'application :  $P : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{2y-x}{3} \\ \frac{4y-2x}{3} \end{pmatrix}$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$ .

Montrer que  $P$  est un projecteur et identifier ses espaces propres :  $\text{Im}(P)$  et  $\text{Ker}(P)$ .

**Exercice 7**

Soit  $(e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  défini par :

$$\begin{cases} f(e_1) = 13e_1 + 12e_2 + 6e_3 \\ f(e_2) = -8e_1 - 7e_2 - 4e_3 \\ f(e_3) = -12e_1 - 12e_2 - 5e_3 \end{cases}$$

1. Montrer que  $f$  est une symétrie de  $\mathbb{R}^3$ .
2. Identifier les espaces propres associés c'est à dire les espaces :  $\text{Ker}(f - Id)$  et  $\text{Ker}(f + Id)$ .

**Exercice 8**

Soit  $E = \mathbb{R}_n[X]$ , le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à  $n$  ( $n$  entier naturel donné). Soit  $\varphi$  l'application définie par :

$$\forall P \in E, \varphi(P) = P(X+1) - P(X)$$

1. Vérifier que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $E$ .
2. Déterminer  $\text{Ker}\varphi$  et  $\text{Im}\varphi$ .

**Exercice 9**

On considère l'espace complexe  $E = \mathbb{C}^3$  muni de sa base canonique  $(e_1, e_2, e_3)$  et  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$  défini par

$$f : \begin{cases} e_1 \rightarrow e_2 \\ e_2 \rightarrow e_3 \\ e_3 \rightarrow e_1 \end{cases}$$

1. Montrer sans calcul que  $f$  est un automorphisme de  $\mathbb{C}^3$  et déterminer  $f^2$  et  $f^{-1}$ .
2. Déterminer  $F = \text{ker}(f - Id)$ ,  $G = \text{ker}(f - jId)$ ,  $H = \text{ker}(f - j^2Id)$ .
3. Montrer que  $E = F \oplus G \oplus H$  et donner une base adaptée à la somme précédente.