# Fiche 48 : Td du 05-02.

**Exercice 1**

On considère dans l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^4$ les vecteurs :

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix}2\\0\\4\\2\end{pmatrix}$$

$$w_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix} w_3 = \begin{pmatrix}2\\-1\\0\\1\end{pmatrix}, w_4 = \begin{pmatrix}2\\2\\2\\2\end{pmatrix}$$

1. Montrer que la famille $(v_1, v_2)$ est libre et que la famille $(v_1, v_2, v_3)$ est liée.
2. Montrer que la famille $(w_1, w_2, w_3)$ est libre et que la famille $(w_1, w_2, w_3, w_4)$ est liée.
3. Montrer que la famille $(v_1, v_2, w_1, w_2)$ est libre.
4. Soit $F$ le sous espace de vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $(v_1, v_2, v_3)$.
   (a) Donner une base et la dimension de $F$.
   (b) Donner un supplémentaire de $F$.
5. Soit $G$ le sous espace de vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $(w_1, w_2, w_3, w_4)$ .
   Donner une base et la dimension de $G$.
6. A l'aide des questions précédentes, donner un système générateur de $F + G$ et montrer que $F + G = \mathbb{R}^4$.
7. $F$ et $G$ sont-ils supplémentaires ?
8. (a) Montrer que $v_1 + v_2$ est dans $F \cap G$.
   (b) Quelle est la dimension de $F \cap G$ ?
   (c) Donner une base de $F \cap G$.

**Exercice 2**

Soit $n \geq 1$ un entier, $a < b$ des réels et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^n$.

On fixe $x_1 < \cdots < x_n$, $n$ réels distincts 2 à 2 dans $[a, b]$.

Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, le *polynôme interpolateur de Lagrange* de $f$ en $x_1 < \cdots < x_n$.
On rappelle que $P(x_1) = f(x_1), \ldots, P(x_n) = f(x_n)$.

L'objectif de cet exercice est de majorer la quantité :

$$M = \mathrm{Max}_{x\in[a,b]} |f(x) - P(x)|$$

Un exemple explicite est proposé à la fin.

1. Justifier l'existence de la quantité $M$.
2. Rappeler l'expression de $P(X)$ en fonction des $x_1 < \cdots < x_n$ et des $f(x_1), ..., f(x_n)$.
   *Il n'est pas demandé de preuve du résultat.*
3. Soit $x_0 \in [a, b]$ différent des $(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ fixé.
   (a) Déterminer un réel $A_{x_0}$ pour lequel la fonction
   $$\varphi : t \in [a, b] \to f(t) - P(t) - A_{x_0}(t - x_1) \ldots (t - x_n)$$
   s'annule en $x_0$
   (b) Montrer que $\varphi$ admet $n + 1$ zéros distincts 2 à 2 dans $[a, b]$.

(c) Montrer alors que la fonction $\varphi^{(n)}$ a au moins un zéro noté $\lambda$ dans $[a, b]$ et qu'on a

$$(f-P)(x_0) = (x_0 - x_1)\ldots(x_0 - x_n)\frac{f^{(n)}(\lambda)}{n!}$$

4. Montrer alors que

$$M \leq \mathrm{Max}_{x\in[a,b]}\,|(x-x_1)\ldots(x-x_n)|\frac{\mathrm{Max}_{x\in[a,b]}\,|f^{(n)}(x)|}{n!}$$

Dans la suite, on étudie l'interpolation de la fonction $x \to f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ en les points $x_1 = -1, x_2 = 0$ et $x_3 = 1$ sur l'intervalle $[-1, 1]$.

5. Déterminer le polynôme $P$ d'interpolation correspondant
6. En étudiant la fonction $x \to (x-x_1)(x-x_1)(x-x_2)$ sur $[-1, 1]$, montrer que les résultats de la partie précédente permettent d'affirmer que :

$$M \leq \frac{1}{9\sqrt{3}}\frac{\pi^3}{8}$$