Sup MPSI, Lycée Jean Perrin, 6 Février 2026.

DS 6, Durée 3h, calculatrices et téléphones interdits.

Exercice 1

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les 3 vecteurs suivants :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1. La famille (v_1, v_2, v_3) est-elle libre ?
2. On pose $F = \text{vect}(v_1, v_2, v_3)$. Déterminer une base de F et sa dimension.
3. Déterminer trois réels a, b, c tels que l'on ait
$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 :\ ax + by + cz = 0 \right\}.$$
4. Expliciter un vecteur w tel que (v_1, v_2, w) soit une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Expliciter un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^3$.
6. On considère le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ (ce point n'a pas à être justifié) :
$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 :\ x + 3y + 2z = 0 \right\}.$$
Déterminer une base de G et sa dimension.
7. Les espaces F et G sont-ils en somme directe ?
8. Déterminer l'espace vectoriel $F + G$ et sa dimension.
9. Déterminer une base de $F \cap G$. Quelle est sa dimension ?

Exercice 2

On considère la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes donnés par : $T_0 = 1$, $T_1(X) = X$ et, si $n \in \mathbb{N}^*$:

$$T_{n+1}(X) = 2X.T_n(X) - T_{n-1}(X)$$

1. Préciser $\deg(T_n)$ et le coefficient dominant de T_n pour $n \in \mathbb{N}^*$ en justifiant proprement.
2. Montrer que si $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:
$$T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$$
On pourra procéder par récurrence avec prédécesseur et utiliser la relation :
$$\cos(a + b) + \cos(a - b) = 2\cos(a)\cos(b)$$
.

Pour la suite, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Montrer que si $Q \in \mathbb{R}[X]$ et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $Q(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ alors $Q = T_n$.
4. Résoudre l'équation d'inconnue θ : $T_n(\cos(\theta)) = 0$.
5. En déduire que T_n a n racines réelles $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ qu'on écrira sous la forme $x_k = \cos(\theta_k)$, $\theta_k \in [0, \pi]$ à préciser, pour $k \in [\![1, n]\!]$.
6. Justifier que T_n est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ et écrire sa factorisation réelle.
7. En remarquant que, si $x \in [-1, 1]$: $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$, déterminer
$$\mathrm{Max}_{[-1,1]} |T_n|$$

On considère pour la suite Q un polynôme de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1}.
On pose
$$M = \mathrm{Max}_{[-1,1]} |Q|$$

8. L'objectif de cette question est de montrer que $M \geq 1$.
   On suppose, par l'absurde, que $M < 1$ et on pose $P = T_n - Q$.
   (a) Montrer que $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
   (b) Déterminer le signe de $P(\cos(k\pi/n))$ en fonction de $k \in \mathbb{N}$ et en déduire (on pourra utiliser le théorème des valeurs intermédiaires) que P a au moins n racines distinctes 2 à 2 dans $[-1, 1]$.
   (c) Conclure

Exercice 3

On considère l'ensemble $\mathcal{N}$ des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme $N = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ ainsi que $\mathcal{U}$ l'ensemble des matrices dites *unipotentes* de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme $U = I + N$ où $N \in \mathcal{N}$ et $I = I_3$ est la matrice identité de $\mathbb{R}^3$.

1. (a) Monter que $\mathcal{N}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. En donner une base et la dimension.
   (b) Monter que $\mathcal{N}$ est stable par produit c'est à dire que si $N \in \mathcal{N}$ et $M \in \mathcal{N}$ alors $N.M \in \mathcal{N}$.
   (c) Calculer N^3 pour $N \in \mathcal{N}$.
2. (a) L'ensemble $\mathcal{U}$ est-il un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?
   (b) Monter que $\mathcal{U}$ est un sous groupe de $GL_3(\mathbb{R})$ où $GL_3(\mathbb{R})$ est le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
3. Soit $U \in \mathcal{U}$ et $N \in \mathcal{N}$ tel que $U = I + N$. On rappelle que U est inversible.
   Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose :
$$U^{(\alpha)} = I + \alpha N + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} N^2$$
   On prendra garde au fait que $U^{(\alpha)}$ tel que défini est une notation, ce n'est pas une puissance.
   (a) Montrer cependant que si $n \in \mathbb{N}$ et U^n désigne la puissance *classique* alors
$$U^{(n)} = U^n$$
   On pourra utiliser la formule du binôme.
   (b) Montrer si $n \in \mathbb{N}$ et U^{-n} désigne la puissance *classique* alors
$$U^{(-n)} = U^{-n}$$
   (c) Montrer que si α et β sont réels alors
$$U^{(\alpha)}.U^{(\beta)} = U^{(\alpha+\beta)} \qquad \text{et} \qquad (U^{(\alpha)})^{(\beta)} = U^{(\alpha\beta)}$$