Sup MPSI, Lycée Jean Perrin, 6 Février 2026.

DS 6 correction rapide.

Exercice 1

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les 3 vecteurs suivants :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1. $v_3 = 2v_2 - v_1$.
2. Une base de F est (v_1, v_2). Dimension : 2.
3. Déterminer trois réels a, b, c tels que l'on ait

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 :\ x - 2y + z = 0 \right\}.$$

4. Pour tout vecteur de la base canonique w : (v_1, v_2, w) soit une base de $\mathbb{R}^3$, par exemple e_1.
5. $F \oplus \mathrm{Vect}(e_1) = \mathbb{R}^3$.
6. On considère le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ (ce point n'a pas à être justifié) :

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 :\ x + 3y + 2z = 0 \right\}.$$

   G est de dimension 2 engendré par : $w_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

7. Les espaces F et G sont-ils en somme directe ? NON.
8. $w_1 \notin F$ donc par raison de dimension : $F + G = \mathbb{R}^3$.
9. En travaillant avec les 2 équation : $F \cap G = \mathrm{Vect}(t)$ avec $t = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

Exercice 2

On considère la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes donnés par : $T_0 = 1$, $T_1(X) = X$ et, si $n \in \mathbb{N}^*$:

$$T_{n+1}(X) = 2X.T_n(X) - T_{n-1}(X)$$

1. Par récurrence avec prédécesseur $\deg(T_n) =$. Le coefficient dominant de T_n pour $n \in \mathbb{N}^*$ est 2^{n-1}.

2. Si $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:
$$T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$$
Fait en classe : par récurrence avec prédécesseur et utiliser la relation :
$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b)$$
.

Pour la suite, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Si $Q \in \mathbb{R}[X]$ et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $Q(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ alors $Q = T_n$ car Q et T_n coïncident sur $[-1, 1]$.
4. $T_n(\cos(\theta)) = 0$ si et seulement si
$$\theta = \frac{(2k-1)\pi}{2n}$$
où $k \in \mathbb{Z}$.
5. Si on prend en compte l'ordre proposé : T_n a n racines réelles $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$
$$x_k = \cos\left(\frac{(2(n-k)+1)\pi}{2n}\right)$$
pour $k \in [\![1, n]\!]$. Ces racines sont distinctes 2 à 2 par les variations de cos.
6. On a finalement
$$T_n = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n}(X - x_k)$$
7. n arccos parcourant $[0, n\pi]$,
$$\mathrm{Max}_{[-1,1]}\,|T_n| = \mathrm{Max}_{[0,n\pi]}\,|\cos| = 1$$

On considère pour la suite Q un polynôme de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1}.
On pose
$$M = \mathrm{Max}_{[-1,1]}\,|Q|$$

8. L'objectif de cette question est de montrer que $M \geq 1$.
On suppose, par l'absurde, que $M < 1$ et on pose $P = T_n - Q$.
   (a) Par soustraction des coefficients dominants : $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
   (b) $P(\cos(k\pi/n)) = (-1)^k - Q(\cos(k\pi/n))$ avec $Q(\cos(k\pi/n)) \in]-1, 1[$ et donc a le signe de $(-1)^k$.
   On a donc : $P(\cos(0)) > 0$, $P(\cos(\pi/n)) < 0$, $P(\cos(2\pi/n)) > 0$ ...
   $P(\cos(n-1)\pi/n)$ et $P(\cos(n)\pi/n)$ de signes opposés (au sens strict).
   P a donc une racine (au moins) dans $]1, \cos(\pi/n)[$;
   P a une racine (au moins) dans $]\cos(\pi/n), \cos(\pi/n)[$ ...
   P a une racine (au moins) dans $]\cos((n-1)\pi/n), \cos(n\pi/n) = -1[$.
   Les intervalles précédents étant disjoints 2 à 2, P a au moins n racines, il est nul !
   (c) Finalement $M \geq 1$

Exercice 3

On considère l'ensemble $\mathcal{N}$ des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme $N = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ ainsi que $\mathcal{U}$ l'ensemble des matrices dites *unipotentes* de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme $U = I + N$ où $N \in \mathcal{N}$ et $I = I_3$ est la matrice identité de $\mathbb{R}^3$.

1. (a) $\mathcal{N}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   (b) $\mathcal{N}$ est stable par produit (facile).

   (c) $N^3 = 0$ pour $N \in \mathcal{N}$.

2. (a) L'ensemble $\mathcal{U}$ est-il un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? NON !

   (b) D'après le cours sur les matrices triangulaires : $\mathcal{U}$ est un sous groupe de $GL_3(\mathbb{R})$ où $GL_3(\mathbb{R})$ est le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

3. Soit $U \in \mathcal{U}$ et $N \in \mathcal{N}$ tel que $U = I + N$. On rappelle que U est inversible.
   Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose :

$$U^{(\alpha)} = I + \alpha N + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} N^2$$

   On prendra garde au fait que $U^{(\alpha)}$ tel que défini est une notation, ce n'est pas une puissance.

   (a) Si $n \in \mathbb{N}$ et U^n désigne la puissance *classique* alors

$$U^{(n)} = U^n = I + nN + \frac{n(n - 1)}{2} N^2$$

   Par la formule du binôme avec $N^3 = 0$.

   (b) Si $n \in \mathbb{N}$ et $U^{-n} = (U^n)^{-1}$ désigne la puissance *classique* alors

$$U^{(-n)} \times U^n = \left(I - nN + \frac{n(n + 1)}{2} N^2\right) \times \left(I + nN + \frac{n(n - 1)}{2} N^2\right) = I$$

   En utilisant $N^3 = 0$.

   (c) Si α et β sont réels alors

$$\begin{aligned} U^{(\alpha)}.U^{(\beta)} &= \left(I + \alpha N + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} N^2\right) \times \left(I + \beta N + \frac{\beta(\beta - 1)}{2} N^2\right) \\ &= I + (\alpha + \beta)N + \frac{(\alpha + \beta)(\alpha + \beta - 1)}{2} N^2 \end{aligned}$$

   Car $\alpha(\alpha - 1) + \beta(\beta - 1) + 2\alpha\beta = (\alpha + \beta)(\alpha + \beta - 1)$

$$(U^{(\alpha)})^{(\beta)} = \left(I + \alpha N + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} N^2\right)^{(\beta)}$$

$$= I + \beta \left(\alpha N + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} N^2\right) + \frac{\beta(\beta - 1)}{2} \left(\alpha N + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} N^2\right)^2$$

$$= I + \beta\alpha N + \frac{\alpha\beta(\alpha\beta - 1)}{2} N^2$$

   En utilisant systématiquement : $N^3 = 0$. Ainsi :

$$U^{(\alpha)}.U^{(\beta)} = U^{(\alpha\beta)}$$