

DM 3, Pour le 06-03, facultatif.

Pour tout entier naturel n et tout $x \in [-1, 1]$, on pose :

$$P_n(x) = \cos(2n \arcsin(x))$$

1. Calculer pour $x \in [-1, 1]$: $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$ (on les écrira sous forme d'expressions polynômiales).
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [-1, 1]$:

$$P_{n+2}(x) + P_n(x) = 2(1 - 2x^2)P_{n+1}(x)$$

(On pourra calculer l'expression $\cos(a+b) + \cos(a-b)$).

3. En déduire que pour tout entier n , la fonction P_n est polynômiale, paire et préciser son degré, son coefficient dominant et son terme constant.
4. Montrer que P_n est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ en déterminant ses racines. (On pourra les chercher sous la forme $\sin(\theta)$).
5. Déduire des calculs précédents :

$$\Pi_n = \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{4n}\right)$$

6. Pour tout entier n , en revenant à la définition de P_n , montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$(x^2 - 1)P_n''(x) + xP_n'(x) = 4n^2 P_n(x)$$