

Fiche 49 : Endomorphismes.

Exercice 1

On pose

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donner, si c'est possible, des exemples d'applications linéaires non nulles de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ vérifiant :

1. $\text{Im}(f) = \text{Vect}(v_1)$; $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(v_1, v_2)$.
2. $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(v_1)$; $\text{Im}(f) = \text{Vect}(v_1, v_2)$.

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - 3f + 2Id = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Montrer que f est un automorphisme.
2. Montrer que $E = \ker(f - Id) \oplus \ker(f - 2Id)$.
3. Dédire de 2. que si E est de dimension finie n , il existe une base $\beta = (\epsilon_i)_{1 \leq i \leq n}$, telle que $\forall i, f(\epsilon_i) = \lambda_i \epsilon_i$ avec $\lambda_i = 1$ ou $\lambda_i = 2$.

Exercice 3

Soit E un espace vectoriel non nul. Soit λ un réel et p et q 2 projecteurs de E de même image F un sous espace de E . Montrer que $\lambda p + (1 - \lambda)q$ est un projecteur de E d'image F .

Exercice 4

Soit p et q 2 projecteurs de E .

Montrer que $p + q$ est un projecteur de E si et seulement si $pq = qp = 0$.

Exercice 5

Soit E un espace vectoriel non nul. Soit f un endomorphisme de E tel que pour tout vecteur x de E la famille $(x, f(x))$ soit liée. Montrer que f est une homothétie.

Exercice 6

Soit E un espace de dimension finie. Trouver les endomorphismes (resp. automorphismes) de E qui commutent avec tous les endomorphismes (resp. automorphismes) de E .

Si $x \in E$, on pourra considérer le cas d'une symétrie par rapport à la droite engendrée par x et appliquer le résultats précédent.

Exercice 7

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$E = \text{Im}(f) + \text{Ker}(f)$$

$$E = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f)$$

$$\text{Ker}f \cap \text{Im}f = \{0\}$$

$$\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$$

$$\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$$