

Fiche 50 : TD du 26-02.

Exercice 1

On considère dans $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} v_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} & v_2 &= \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} & v_3 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ w_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} & w_2 &= \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} & w_3 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par (v_1, v_2, v_3) et G celui engendré par (w_1, w_2, w_3) .

- Donner des bases, les dimensions et des systèmes d'équations définissant F et G et $F + G$.

- Soit $E = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4; 4x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \right\}$. Montrer que $F + G = E$. La somme est-elle directe? Quelle est la dimension de $F \cap G$?

Exercice 2

On considère $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - 3y - z \\ x + 2y + z \\ 4x + 5y + 3z \end{pmatrix}$.

Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et déterminer f^{-1} .

Exercice 3

Soient $P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3; 2x + y - z = 0 \right\}$ et $D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3; 2x - 2y + z = 0, x - y - z = 0 \right\}$.

- Montrer que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
- Soit p la projection de $\mathbb{R}^3$ sur P parallèlement à D . Déterminer p et vérifier que $p^2 = p$.
- Soit s la symétrie de $\mathbb{R}^3$ par rapport à P parallèlement à D . Déterminer s puis vérifier que $s^2 = Id$.

Exercice 4

On considère l'espace $E = \mathbb{R}_3[X]$ et les applications suivantes définies sur E :

$$\delta_0 : P \rightarrow P(0), \delta'_0 : P \rightarrow P'(0), \delta_1 : P \rightarrow P(1), \delta'_1 : P \rightarrow P'(1)$$

- Rappeler les dimensions de E et de E' .
- Montrer que $\delta_0, \delta'_0, \delta_1, \delta'_1$ est une base de E' .
- Construire la base duale associée.
- En déduire l'existence et l'expression, pour une fonction f dérivable sur $[0, 1]$ donnée, du spline cubique de f , c'est à dire d'un polynôme P de degré 3 tel que

$$P(0) = f(0), P(1) = f(1), P'(0) = f'(0), P'(1) = f'(1)$$