

Exercice 1. Vie courante

1. L'eau à l'état liquide imprégnée dans les vêtements va s'évaporer pour chercher à atteindre un état d'équilibre où elle remplit la pièce (soit à l'état gazeux, soit sous forme d'un mélange liquide-vapeur), ce qui a pour effet de sécher le linge.
La quantité maximale de vapeur qui peut être contenue dans une pièce fermée est $m = nM = \frac{MP_{\text{sat}}V}{RT}$. À 20 °C, la pression de vapeur saturante vaut $P_{\text{sat}} = 2,3 \times 10^3 \text{ Pa}$. Pour une pièce de 25 m³, on obtient une masse $m = 425 \text{ g}$. Ce n'est pas beaucoup, surtout qu'en général l'air est déjà humide. Il vaut donc mieux soit chauffer davantage, soit aérer la pièce.
2. La température d'ébullition croît avec la pression. En altitude, la pression diminue (de moitié tous les 5000 mètres), donc l'eau bout à des températures inférieures à 100 °C. Cette température plus basse rend plus difficile la cuisson.
Au contraire, une cocotte minute est un récipient dans lequel la pression devient supérieure à la pression atmosphérique, si bien que l'équilibre liquide-vapeur se fait à des températures supérieures à 100 °C. La cuisson est alors plus rapide.
3. L'air expiré est chaud. Il contient naturellement une certaine fraction de vapeur d'eau qui a donc une certaine pression partielle (inférieure à la pression de vapeur saturante pour la température du corps). Lorsque cet air refroidit au contact de l'air froid, la pression de vapeur saturante diminue et peut devenir inférieure à la pression de vapeur d'eau de l'air expiré. Alors la vapeur se liquéfie en partie pour atteindre l'équilibre liquide-vapeur, d'où le nuage formé.

Exercice 2. Pot de confiture

En supposant négligeable la variation de volume de la confiture (hypothèse de la phase condensée incompressible et indilatable), l'air emprisonné a une quantité de matière et un volume fixe. D'après la loi des gaz parfaits, le quotient p/T reste fixe. La température vaut initialement $T_i = 353 \text{ K}$ et à la fin $T_f = 293 \text{ K}$. La pression passe donc de $p_i = p_{\text{atm}} = 1,01 \times 10^5 \text{ Pa}$ à $p_f = p_i T_f / T_i = 8,38 \times 10^4 \text{ Pa}$.

Les forces pressantes exercées sur le couvercle d'aire $S = \pi D^2/4$, sont dues :

- à l'atmosphère, de pression p_{atm} : $\vec{F}_{\text{ext}} = -p_{\text{atm}} S \vec{e}_z$;
- à l'air emprisonné, de pression p_f : $\vec{F}_{\text{int}} = +p_f S \vec{e}_z$;

où $\vec{e}_z$ est la normale dirigée vers l'extérieur. La résultante est $\vec{F}_p = \vec{F}_{\text{ext}} + \vec{F}_{\text{int}} = (p_f - p_{\text{atm}}) S \vec{e}_z = -p_{\text{atm}} (1 - T_f/T_i) \pi D^2/4 \vec{e}_z$.

Elle est dirigée vers l'intérieur et a pour module $F_p = p_{\text{atm}} (1 - T_f/T_i) \pi D^2/4 = 72 \text{ N}$, ce qui correspond au poids d'un objet de masse $m = F_p/g = 7,3 \text{ kg}$.

C'est cette force qui permet de fermer le pot de façon étanche, et qu'il faut contrer à l'ouverture. Le 'poc' entendu est une onde de choc causée par l'entrée subite d'air.

Exercice 3. Gonflage

1. En modélisant l'air comme un gaz parfait, la quantité de matière d'air à ajouter dans le pneu pour que la pression passe de $P_i = P_{\text{atm}}$ à $P_f = P_{\text{atm}} + P$ est $n_{\text{tot}} = \frac{(P_f - P_i)V_0}{RT} = \frac{PV_0}{RT}$.

Chaque coup de pompe apporte une quantité de matière $n_{\text{pompe}} = \frac{P_{\text{atm}}V}{RT}$.

Le nombre N de coups de pompe nécessaire doit donc vérifier

$$N n_{\text{pompe}} > n_{\text{tot}} \text{ soit } N > \frac{PV_0}{P_{\text{atm}}V} = 20,7.$$

Il faut donc 21 coups de pompe pour gonfler le pneu.

2. Le gaz dans le pneu évolue à n et V fixés. Si la pression augmente c'est que la température augmente (à cause des frottements du roulement). Le produit P/T est constant pour ce gaz parfait donc $T_f = T_i P_f / P_i = 312 \text{ K}$ soit 39 °C.

Exercice 4. Rosée

La pression de vapeur d'eau initialement présente est $p_i(\text{H}_2\text{O}) = \frac{60}{100} P_{\text{sat}}(20^\circ\text{C}) = 1,4 \times 10^3 \text{ Pa}$.

En modélisant cette vapeur par un gaz parfait, cela représente une quantité de matière $n = p_i(\text{H}_2\text{O})V/(RT_i) = 17 \text{ mol}$.

Or, à $T_f = 5^\circ\text{C}$, la quantité maximale d'eau pouvant exister dans le volume V à l'état de vapeur (on néglige la variation de ce volume due au changement de température et à l'appartition éventuelle d'eau liquide) est $n_{g,\text{max}} = P_{\text{sat}}(5^\circ\text{C})V/(RT_f) = 11 \text{ mol}$. On en déduit que l'eau passe à l'équilibre liquide-vapeur, avec une quantité $n_g = n_{g,\text{max}}$ à l'état vapeur, et le reste à l'état liquide, soit $n_\ell = n - n_g = 6 \text{ mol}$.

La masse molaire de l'eau valant $M = 18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$, ceci représente une masse

$$m = n_\ell M = \left(\frac{60 P_{\text{sat}}(20^\circ\text{C})}{100 T_i} - \frac{P_{\text{sat}}(5^\circ\text{C})}{T_f} \right) \times \frac{MV}{R} = 1,1 \times 10^2 \text{ g}.$$

Exercice 5. Compresseur

1. À la fin du $n^{\text{ième}}$ cycle, la pression est P_n . Elle ne varie pas lorsque la soupape S_2 se ferme donc le l'air contenu dans le compresseur a pour volume V_m et pour pression P_n . Dans la suite, ce système fermé évolue à température constante donc PV est une constante.
2. La soupape S_1 s'ouvre quand la pression du système vaut P_0 . Le système passe de (P_n, V_m) à (P_0, V) donc le volume est $V = P_n V_m / P_0$ à l'ouverture de S_1 . Dans la

suite du mouvement du piston jusqu'au volume V_M , l'air entre dans le compresseur et la pression est la pression atmosphérique P_0 .

3. L'air dans le compresseur constitue à nouveau un système fermé lors du retour du piston, quand S_1 se ferme, jusqu'à ce que S_2 s'ouvre lorsque la pression du compresseur atteint la pression du réservoir, c'est-à-dire P_n . Le système passe de (P_0, V_M) à (P_n, V') donc le volume est $V' = P_0 V_M / P_n$ à l'ouverture de S_2 .
4. Dans la suite du mouvement du piston, le système constitué de l'air dans le compresseur et dans le réservoir est fermé. Au départ sa pression est de P_n et son volume de $V_0 + V'$. A la fin sa pression est P_{n+1} et son volume $V_0 + V_m$. Ainsi $P_{n+1} = P_n(V_0 + V') / (V_0 + V_m) = (V_0 / (V_0 + V_m)) P_n + P_0 V_M / (V_0 + V_m)$.
5. On obtient une suite géométrique de raison $a = V_0 / (V_0 + V_m) \in]0; 1[$ donc qui converge de façon croissante. La valeur maximale pour la pression est la valeur limite qui est telle que $P_n = P_{n+1} = P_{lim}$. On obtient $P_{lim} = (V_M / V_m) P_0$.
Note : le terme générique de la suite est $P_n = P_{lim} - (P_{lim} - P_0) a^n$

Exercice 6. Équilibres d'un piston

1. Notons la quantité de matière commune aux deux gaz. D'après la loi des gaz parfaits, $P_0 S \ell = n R T_0$.
Une fois le cylindre relevé, le compartiment du bas possède une pression P_b et un volume $V_b = S \ell (1 - x)$ et le compartiment du haut une pression P_h et un volume $V_h = S \ell (1 + x)$. La température et la quantité de matière dans les deux compartiments est inchangée, si bien que l'on a les relations :

$$P_b S \ell (1 - x) = n R T_0 = P_0 S \ell \Leftrightarrow P_b = \frac{P_0}{1 - x}$$

$$P_h S \ell (1 + x) = n R T_0 = P_0 S \ell \Leftrightarrow P_h = \frac{P_0}{1 + x}$$

De plus l'équilibre mécanique du piston impose (voir exercice de cours B) $P_b = P_h + \frac{mg}{S} = P_h + \Delta P$.

On a ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{P_0}{1 - x} &= \frac{P_0}{1 + x} + \Delta \Leftrightarrow \frac{1}{1 - x} - \frac{1}{1 + x} = \frac{\Delta P}{P_0} \\ &\Leftrightarrow \frac{2x}{1 - x^2} = \frac{\Delta P}{P_0} \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2 \frac{P_0}{\Delta P} x - 1 = 0 \end{aligned}$$

La racine négative est inférieure à -1 et n'a pas de sens physique car cela conduit à une longueur négative pour le compartiment du haut.

L'autre racine est $x = -\frac{P_0}{\Delta P} + \sqrt{1 + \left(\frac{P_0}{\Delta P}\right)^2} = 5,0 \times 10^{-2}$.

Puisque $x > 0$, le piston descend effectivement, conformément à l'intuition.

On en déduit les pressions : $P_b = \frac{P_0}{1 - x} = 10,5 \text{ kPa}$ et $P_h = \frac{P_0}{1 + x} = 9,5 \text{ kPa}$.

2. On note cette fois x' la proportion de déplacement du piston vers le bas (par rapport à la position médiane).
Dans ce cas la loi des gaz parfait dans les deux compartiments s'écrit ainsi :

$$P'_b S \ell (1 - x') = n R T_1 = P_0 S \ell \frac{T_1}{T_0} \Leftrightarrow P'_b = \frac{P'_0}{1 - x'}$$

$$P'_h S \ell (1 + x') = n R T_1 = P_0 S \ell \frac{T_1}{T_0} \Leftrightarrow P'_h = \frac{P'_0}{1 + x'}$$

où $P'_0 = P_0 \frac{T_1}{T_0} = 13,7 \text{ kPa}$.

Ces expressions sont identiques à celles de la question précédente en remplaçant P_0 par P'_0 .

Par analogie on en déduit : $x' = -\frac{P'_0}{\Delta P} + \sqrt{1 + \left(\frac{P'_0}{\Delta P}\right)^2} = 3,7 \times 10^{-2}$.

3. Si les compartiments ont le même volume, la même quantité de matière et la même température, ils ont la même pression : c'est **impossible** en position verticale à cause du poids du piston.

Exercice 7. Modèles de gaz réels

1. Si P tend vers l'infini à n et T fixés, on comprime au maximum le fluide. V tend alors vers nb qui est donc le volume propre des entités du gaz. b représente donc le volume propre molaire de ces entités.
2. $V = nb + \frac{nRT}{P}$ donc $PV = nRT + nbP$ ou $PV_m = RT + bP$. Dans le diagramme d'Amagat (PV_m, P) , les isothermes sont des droites de pente b et d'ordonnée à l'origine RT .
3. Pour valider le modèle, on trace ce diagramme. Le modèle est valide si les isothermes sont effectivement des droites, parallèles entre elles. b est obtenu en mesurant leur pente.

4. Pour un gaz de Clausius, $\frac{PV}{nRT} = 1 + \frac{b}{RT}P$ qui est une droite croissante pour une isotherme. À part H_2 on observe que tous les autres gaz présente une pente négative. Ce modèle est donc très limité.

5. L'équation de van der Waals se met sous forme molaire : $(P + a/V_m^2)(V_m - b) = RT$. Il vient $PV_m(1 + a/(PV_m^2))(1 - b/V_m) = RT$ d'où $PV_m = RT(1 - a/(PV_m^2) + b/V_m) + o(a/(PV_m^2)) + o(b/V_m)$ (au premier ordre).

On a alors $a/(PV_m^2) = \frac{aP}{(PV_m)^2} \sim \frac{aP}{(RT)^2}$ et $b/V_m = \frac{bP}{PV_m} \sim \frac{bP}{RT}$ d'où

$PV_m = RT \left(1 - \frac{aP}{(RT)^2} + \frac{bP}{RT} \right)$ au premier ordre. C'est l'expression demandée avec

$$f(T) = \frac{bRT - a}{(RT)^2}.$$

6. Dans le diagramme d'Amagat (PV_m, P) , une isotherme est une droite, d'ordonnée à l'origine RT et de pente $RTf(T) = \frac{bRT - a}{RT}$. Cette pnte peut être positive ou négative ce qui améliore le modèle de Clausius.

Pour $T = T_M = \frac{a}{bR}$, on obtient une droite horizontale, comme dans le cas d'un gaz parfait.

7. $P = \frac{nRT}{V - nb} - \frac{an^2}{V^2}$ donc $\left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T = -\frac{nRT}{(V - nb)^2} + \frac{2an^2}{V^3}$ et $\left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2} \right)_T = \frac{2nRT}{(V - nb)^3} - \frac{6an^2}{V^4}$.

Au point critique on a alors $-\frac{nRT_c}{(V_c - nb)^2} + \frac{2an^2}{V_c^3} = 0$ et $\frac{2nRT_c}{(V_c - nb)^3} - \frac{6an^2}{V_c^4} = 0$. On

en déduit $\frac{RT_c}{an} = \frac{2(V_c - nb)^2}{V_c^3} = \frac{3(V_c - nb)^3}{V_c^4}$ d'où $2V_c = 3(V_c - nb)$ ce qui donne

$V_c = 3nb$. Il vient ensuite $T_c = \frac{8}{27bR}$ et $P_c = \frac{4 - 3a}{27b^2}$. Ces relations permettent de

fixer les coefficients empiriques a et b connaissant le point critique du corps étudié.