

Fiche 51 : Matrices.

Exercice 1

Montrer que les 2 fonctions suivantes sont dérivables sur $\mathbb{R}$, que f est C^1 sur $\mathbb{R}$ mais pas g :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow e^x \text{ si } x < 0 \\ x \rightarrow x + 1 \text{ si } x \geq 0 \end{cases} \quad g : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \rightarrow 0 \end{cases}$$

Exercice 2

Soit E un espace de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et f un endomorphisme de E tel que $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$, $p \in \mathbb{N}^*$.

Un tel endomorphisme est dit *nilpotent d'indice p*

1. $e \in E$ est tel que $f^{p-1}(e) \neq 0$, montrer que la famille $(e, f(e), \dots, f^{p-1}(e))$ est libre.
2. En déduire que $p \leq n$.
3. Montrer que le cas de la dérivation D_n dans l'espace $E_n = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ donne un exemple où $p = n$.
4. Existe-t-il un endomorphisme A_n de $E_n = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $D_n = A_n^2$?
5. On note D la dérivation dans l'espace $E = \mathbb{R}[X]$ et A un endomorphisme de E tel que $A^2 = D$. Montrer que $\text{Ker}(D^2)$ est stable par A .
6. Existe-t-il un endomorphisme A de $E = \mathbb{R}[X]$ tel que $D = A^2$?

Exercice 3

$A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall i = 1, \dots, n \quad |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|.$$

En considérant son noyau, montrer que A est inversible.