

Fiche 52 : Calcul asymptotique.

Exercice 1

Comparer (au sens de "est négligeable par rapport à") les suites suivantes :

$$a_n = n^n, \quad b_n = n^{\ln(n)}, \quad c_n = e^{n^2}, \quad d_n = (\ln n)^{n \ln n}$$

Exercice 2

Donner des équivalents les plus simples possibles des suites : $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$, $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1}$, $\frac{n+(-1)^n}{n+\sqrt{n}}$

Exercice 3

On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \frac{2n-1}{n^2+n}$ et $v_n = \frac{\ln(n) + 6n^2}{3n^3 - 2n \ln(n)}$.

1. Déterminer des équivalents simples des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Déterminer des équivalents simples de $u_n + v_n$ et $u_n - v_n$.

Exercice 4

1. Montrer que si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$ et si $(u_n) \rightarrow 0$ alors $\ln(1 + u_n) \sim u_n$.
2. Soit a un réel. Déterminer la limite de $\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$.

Exercice 5 : Théorème de Césaro

On considère une suite (u_n) telle que $u_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\frac{1}{n}(u_1 + \dots + u_n) \rightarrow l$$

Exercice 6 : Lemme de Césaro

On considère une suite (u_n) telle que $u_{n+1} - u_n \rightarrow l \in \mathbb{R}^*$. Montrer que

$$u_n \sim n.l$$

Indication : on pourra utiliser le théorème de Césaro.

Exercice 7

Donner les développements limités aux ordres demandés des fonctions proposés :

1. Développement à l'ordre 3 pour $x \rightarrow \pi/4$ de $\sin(x)$.
2. Développement à l'ordre 4 pour $x \rightarrow 0$ de $\frac{1}{\cos(x)}$.
3. Développement à l'ordre 2 pour $x \rightarrow 2$ de $\sqrt{x}$.
4. Développement à l'ordre 3 pour $x \rightarrow \pi/3$ de $\tan(x)$.
5. Développement à l'ordre 4 pour $x \rightarrow 0$ de $\exp(\cos(x))$.

Exercice 8

1. Étudier la suite définie par : $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.
2. On pose $v_n = u_n^2 - u_{n-1}^2$. Montrer que $\lim v_n = 2$, puis en déduire que $u_n \sim \sqrt{2n}$ (on pourra utiliser le lemme de CÉSARO précédent).