

Fiche 53 : Td du 5-03.

Exercice 1

Pour les applications linéaires suivantes, déterminer $\ker f_i$ et $\operatorname{Im} f_i$. En déduire si f_i est injective, surjective, bijective.

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : f_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ x - y \end{pmatrix}$$

$$f_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y + z \\ y - z \\ x + y \end{pmatrix}$$

$$f_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4 \quad f_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 0x - 7y \\ x + y \end{pmatrix}$$

$$f_4 : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad f_4(P) = (P(-1), P(0), P(1))$$

Exercice 2

On note (i, j, k) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et M la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer $M(2i - 3j + 5k)$.
2. Déterminer $\operatorname{Ker}(M)$ et $\operatorname{Im}(M)$.
3. Calculer M^2 et M^3 .
4. Déterminer $\operatorname{Ker}(M^2)$ et $\operatorname{Im}(M^2)$.
5. Vérifier que $E_1 = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / AM = 0\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. En donner une base.
6. Vérifier que $E_2 = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / MA = 0\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. En donner une base.

Exercice 3

Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est nilpotente, on définit :

$$\exp A = \sum_{i \geq 0} \frac{A^i}{i!},$$

la somme étant finie et s'arrêtant par exemple au premier indice i tel que $A^i = 0$.

1. Montrer que si A et B sont nilpotentes et commutent, alors $(A + B)$ est aussi nilpotente. et que dans ce cas $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$.
2. En déduire que $\exp(A)$ est toujours inversible et calculer son inverse.

$$3. \text{ Soit } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer $\exp(A)$ et $\exp(B)$.

Exercice 4

Pour $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on appelle $\operatorname{Tr}(M)$ la somme des 2 coefficients de M sur la diagonale de M .

1. Montrer que Tr définit une forme linéaire sur l'espace $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Rappeler la dimension de l'espace $E = \ker(\operatorname{Tr}) \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et donner une base de E formée de matrices de la forme $AB - BA$.
3. Soit $f \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})'$ telle que $\forall (A, B) \in M_n(\mathbb{R})^2 : f(AB) = f(BA)$. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f = \alpha \operatorname{Tr}$.