

[P14] Complément : masse posée sur un piston

Dnas l'exercice de cours C et dans l'exercice 3 du TD, on a la situation classique d'une pierre posée sur un piston. On considère alors que la pression extérieure exercée sur le gaz emprisonné est constante et égale à la pression finale du gaz $P_{\text{ext}} = P_f = P_0 + \frac{mg}{S}$.

Cependant, il n'est pas parfaitement rigoureux de supposer la transformation monobare. Calculons en effet la force $\vec{F}_{\text{ext}} = -P_{\text{ext}}S\vec{e}_z$ exercée par le piston sur le gaz.

D'après la troisième loi de Newton, c'est l'opposé de la force exercée par le gaz sur le système {piston+masse} : $\vec{F}_{\text{gaz}} = -\vec{F}_{\text{ext}}$. Ce système est également soumis à la force pressante de l'atmosphère $\vec{F}_{\text{atm}} = -P_0S\vec{e}_z$ et au poids $\vec{P} = -mg\vec{e}_z$.

D'après la deuxième loi de Newton son accélération vérifie alors : $\vec{F}_{\text{gaz}} + \vec{F}_{\text{atm}} + \vec{P} = m\vec{a}$ donc

$$\vec{F}_{\text{ext}} = -\vec{F}_{\text{gaz}} = +\vec{F}_{\text{atm}} + \vec{P} - m\vec{a} = -\left(P_0 + \frac{mg}{S}\right)S\vec{e}_z - m\vec{a} = -P_fS\vec{e}_z - m\vec{a}$$

On voit qu'en plus du terme associé à la pression finale, il se rajoute un terme lié à l'accélération du piston qui n'est certainement pas nulle ni constante.

Quand on calcule le travail de $\vec{F}_{\text{ext}}$, on doit ajouter au terme usuel $W_p = -P_f\Delta V$ un terme supplémentaire :

$$W' = \int (-m\vec{a}) \cdot d\vec{\ell} = -m \int \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = -\frac{1}{2}m \int \frac{dv^2}{dt} dt = -\Delta\mathcal{E}_c$$

Le premier principe s'écrit alors :

$$\Delta U = Q - \left(P_0 + \frac{mg}{S}\right)\Delta V - \Delta\mathcal{E}_c$$

Dans les situations étudiées, le piston est immobile au début et à la fin, donc $\Delta\mathcal{E}_c = 0$: le terme gênant disparaît et **tout se passe comme si seule la force de pression extérieure agissait**. C'est pourquoi on peut se permettre de supposer la transformation monobare.

Pour être rigoureux, tout en évitant ces calculs laborieux, le plus simple est de considérer le système {gaz+piston+masse}. Pour ce système, la variation de l'énergie mécanique macroscopique est celle de la masse et vaut :

$$\Delta\mathcal{E}_m = \Delta\mathcal{E}_c + \Delta\mathcal{E}_{pp} = \Delta\mathcal{E}_c + mg\Delta z = \Delta\mathcal{E}_c + \frac{mg}{S}\Delta V$$

puisque $V = Sz$.

Le travail extérieur exercé est celui de la force pressante atmosphérique et vaut $W_{\text{atm}} = -P_0\Delta V$.

Le premier principe s'écrit alors :

$$\Delta\mathcal{E}_c + \frac{mg}{S}\Delta V + \Delta U = Q - P_0\Delta V \quad \text{soit} \quad \Delta U = Q - P_0\Delta V - \frac{mg}{S}\Delta V - \Delta\mathcal{E}_c$$

où ΔU est la variation d'énergie du gaz (qui est le seul dont la température varie éventuellement).

Cette équation est bien la même que précédemment.