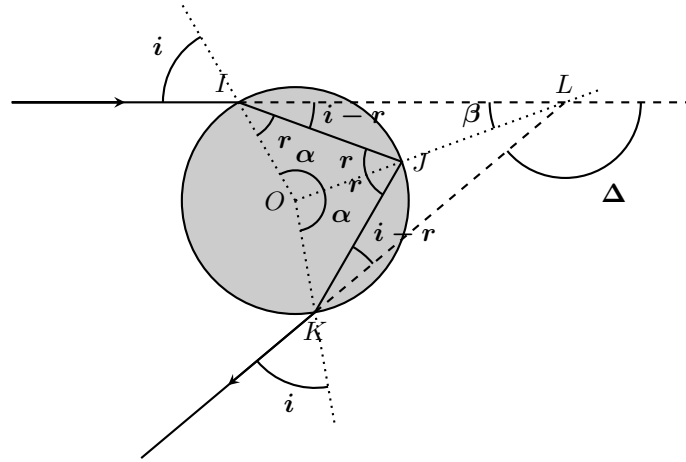


PROBLÈME I

L'arc-en-ciel

I.1) La première loi de Snell-Descartes stipule que le rayon réfracté appartient au plan d'incidence défini par le rayon incident et la normale au dioptre au point d'incidence. La deuxième loi de Snell-Descartes précise la relation entre les angles d'incidence et de réfraction : ici on a $n_{\text{air}} \sin(i) = n \sin(r)$.

I.2) L'angle d'incidence en J à l'intérieur de la goutte vaut r car le triangle OIJ est isocèle. Un rayon réfracté dans l'air existe s'il existe un angle i' solution de l'équation $n \sin(r) = n_{\text{air}} \sin(i')$. Or $i' = i$ est solution : **il y a donc un rayon réfracté**. Par conséquent, seule une petite partie de l'énergie lumineuse est réfléchie.



I.3) Par symétrie O , J et L sont alignés. Dans le triangle OIJ , l'angle $\alpha = \pi - 2r$ et dans le triangle OIL l'angle $\beta = \pi - i - \alpha = 2r - i$.

On en déduit $\Delta = \pi - 2\beta = \pi - 4r + 2i$.

Or $r = \arcsin(\sin(r)) = \arcsin(\sin(i)/n) = \arcsin(x/n)$ avec $n_{\text{air}} = 1$. Pour conclure, $\Delta = \pi - 4 \arcsin(x/n) + 2 \arcsin(x)$.

I.4)
$$\Delta'(x) = -\frac{4}{n} \times \frac{1}{\sqrt{1 - (x/n)^2}} + 2 \times \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{4}{\sqrt{n^2 - x^2}}.$$

Cette dérivée s'annule lorsque $\frac{1}{1 - x^2} = \frac{4}{n^2 - x^2}$ soit lorsque $3x^2 = 4 - n^2$. La déviation passe donc par un extrêmu en $x_m = \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}}$.

I.5) La goutte est éclairée par un faisceau qui la frappe selon toutes les incidences possibles. Or on observe qu'il existe un intervalle assez large d'angles d'incidence pour lequel la déviation varie peu autour de son minimum, ainsi de nombreux rayons sont renvoyés dans des directions très proches, d'où l'accumulation de lumière.

I.6) Un milieu dans lequel l'indice dépend de la longueur d'onde est dit dispersif.

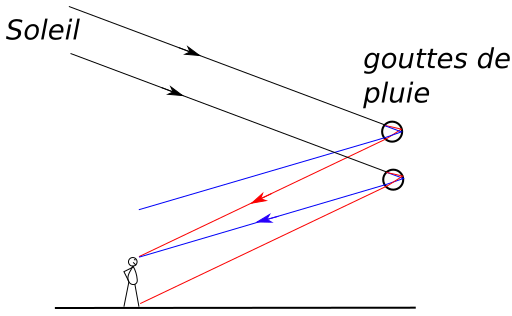
Pour une radiation rouge, de longueur d'onde $\lambda_r = 700$ nm par exemple, l'indice vaut $n_r = 1,331$.

Pour une radiation bleue, de longueur d'onde $\lambda_b = 450$ nm par exemple, l'indice vaut $n_b = 1,346$.

I.7) Pour la radiation rouge $x_{m,r} = 0,862$ soit $i_{m,r} = 59,5^\circ$ et $r_{m,r} = 40,4^\circ$ d'où $\Delta_{m,r} = 137,4^\circ$.

Pour la radiation bleue $x_{m,b} = 0,854$ soit $i_{m,b} = 58,7^\circ$ et $r_{m,b} = 39,4^\circ$ d'où $\Delta_{m,b} = 139,8^\circ$.

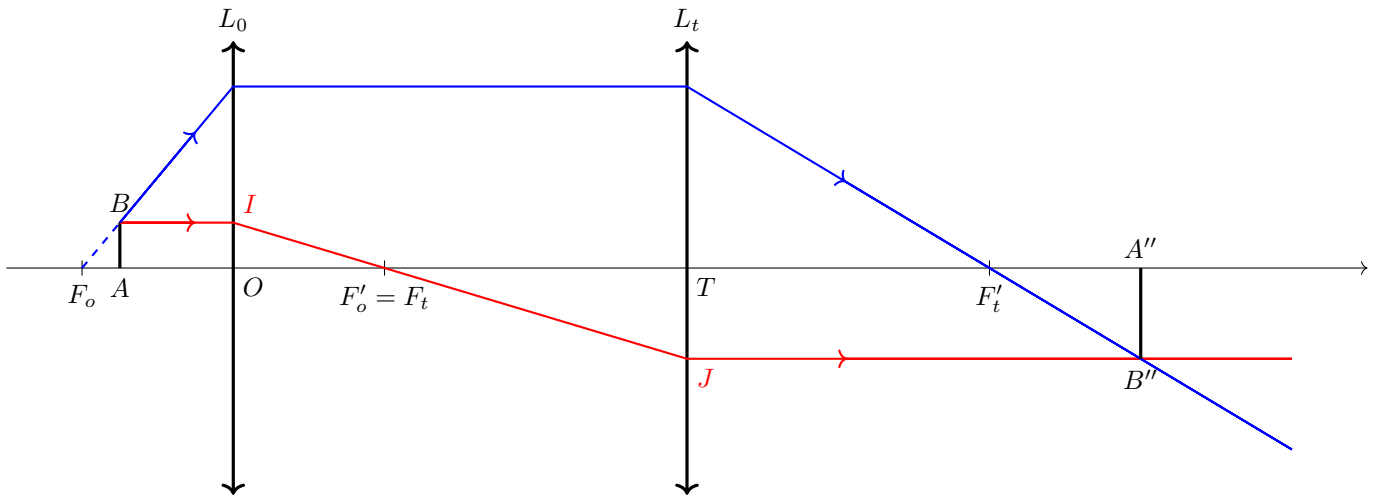
I.8) Les rayons bleus sont plus déviés que les rouges donc ils arrivent dans l'œil en étant moins inclinés par rapport à l'horizontale et sont donc vus plus bas. Par conséquent **le rouge est vu à l'extérieur de l'arc-en-ciel**.



PROBLÈME II

Microscope de fluorescence plein champ

II.1) On exploite pour la construction les foyers.



II.2) En utilisant Thalès : $\gamma_t = \frac{\overline{A''B''}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{TJ}}{\overline{OI}} = \frac{\overline{F_tT}}{\overline{F'_oO}}$ d'où $\gamma_t = -\frac{f'_t}{f'_o} = -40,0$.

Le grandissement est négatif : l'image est **retournée**.

II.3) On peut reformuler le grandissement en utilisant les relations de grandissement. En notant $A'B'$ l'image intermédiaire : $\gamma_t = \frac{\overline{A''B''}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A''B''}}{\overline{A'B'}} \times \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \gamma_o \times \gamma_t$.

Avec les relations de Newton : $\gamma_o = \frac{\overline{F_oO}}{\overline{F'_oA}} = \frac{f'_o}{\varepsilon}$ et $\gamma_t = \frac{\overline{F'_tA''}}{\overline{F'_tT}} = \frac{\varepsilon''}{-f'_t}$.

Ainsi, $\gamma_t = -\frac{\varepsilon''}{\varepsilon} \times \frac{f'_o}{f'_t}$.

En utilisant le résultat de la question précédente : $\frac{\varepsilon''}{\varepsilon} = \left(\frac{f'_t}{f'_o}\right)^2$.

II.4) Les images vues nettes sur le capteur sont telles que $\varepsilon'' = 0$. Elles correspondent aux objets tels que $\varepsilon = 0$ c'est-à-dire situés **dans le plan focal objet de l'objectif**.

II.5) Pour distinguer deux images il faut $A''B'' > \delta$. Or $\frac{A''B''}{AB} = |\gamma_t|$ cela implique $AB = \frac{A''B''}{|\gamma_t|} > \frac{\delta}{|\gamma_t|}$.

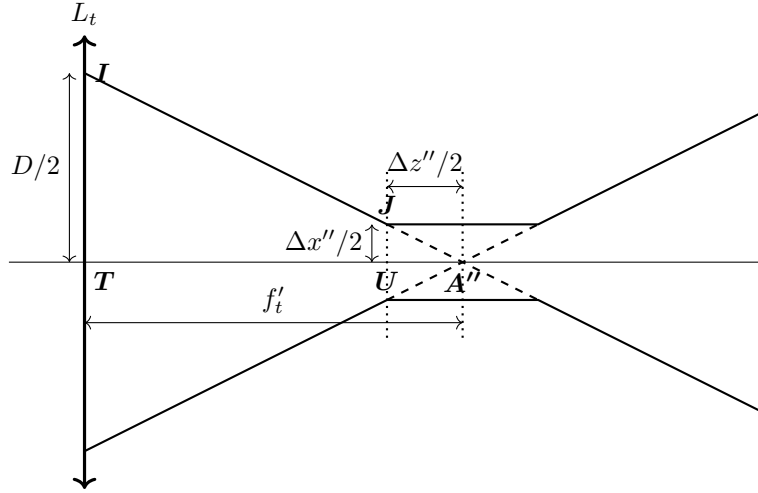
En conclusion la resolution vaut $\Delta_p x = \frac{\delta f'_o}{f'_t} = 0,25 \mu\text{m}$.

II.6) Pour distinguer A'' et B'' il faut que leurs taches de diffraction ne se recouvrent pas, donc que $A''B'' > \Delta x''$. Il faut alors $AB = \frac{A''B''}{|\gamma_t|} > \frac{\Delta x''}{|\gamma_t|} \approx \frac{\lambda f'_t f'_o}{f'_t D}$.

La résolution vaut alors $\Delta x = \frac{\lambda f'_o}{D} = \frac{\lambda}{2ON}$.

II.7) En utilisant le théorème de Thalès dans les triangles semblables $A''TI$ et $A''UJ$ ci-dessous, $\frac{\Delta z''/2}{\Delta x''/2} = \frac{f'_t}{D/2}$. On en

tire $\Delta z'' = \frac{2\Delta x'' f'_t}{D} \approx 2\lambda \left(\frac{f'_t}{D}\right)^2$.



II.8) Le long du « col » du sablier, la tache a même diamètre. Ainsi, son diamètre reste égal à $\Delta x''$ tant que l'image est translatée de moins de $\Delta z''/2$ à gauche ou à droite : $|\varepsilon''| < \Delta z''/2 = \lambda \left(\frac{f'_t}{D}\right)^2$.

Or d'après la question II.3), $\varepsilon'' = \varepsilon \times \left(\frac{f'_t}{f'_o}\right)^2$. Il faut donc $|\varepsilon| < \lambda \left(\frac{f'_t}{D}\right)^2 \times \left(\frac{f'_o}{f'_t}\right)^2 = \lambda \left(\frac{f'_o}{D}\right)^2 = \frac{\lambda}{4ON^2}$.

Cette condition délimite un intervalle : $\varepsilon \in \left[-\frac{\lambda}{4ON^2}; \frac{\lambda}{4ON^2}\right]$ dont la largeur est la profondeur de champ : $\Delta z = \frac{\lambda}{2ON^2}$.

II.9) $\Delta x = 0,34 \mu\text{m}$ et $\Delta z = 0,45 \mu\text{m}$.

$\Delta x > \Delta_p x$ donc la résolution latérale est **principalement limitée par la diffraction**.

PROBLÈME III

Carbonate de calcium

Partie A. Solubilité du carbonate de calcium

III.1) ion carbonate : $\text{O}^{\ominus} \text{---} \text{C} \text{---} \text{O}^{\ominus}$

ion hydrogénocarbonate : $\text{H} \text{---} \text{O} \text{---} \text{C} \text{---} \text{O}^{\ominus}$

acide carbonique : $\text{H} \text{---} \text{O} \text{---} \text{C} \text{---} \text{O} \text{---} \text{H}$

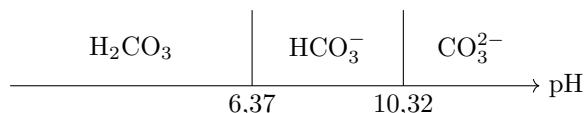
III.2) Pour le couple $\text{AH}(\text{aq})/\text{A}^-(\text{aq})$, $K_a = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]_{eq} \times [\text{A}^-]_{eq}}{[\text{AH}]_{eq} \times c^\circ}$ soit $\frac{[\text{AH}]_{eq}}{[\text{A}^-]_{eq}} = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]_{eq}/c^\circ}{K_a}$.

La forme acide AH domine sur la forme basique A^- ssi

$$\frac{[\text{AH}]_{eq}}{[\text{A}^-]_{eq}} > 1 \Leftrightarrow [\text{H}_3\text{O}^+]_{eq}/c^\circ > K_a \Leftrightarrow \text{pH} = -\log([\text{H}_3\text{O}^+]_{eq}/c^\circ) < -\log(K_a)$$

Inversement A^- domine sur AH pour $pH > -\log(K_a)$.

On en déduit le diagramme de prédominance suivant pour les espèces carbonatées :



III.3) La dissolution du carbonate de calcium a pour équation $\boxed{CaCO_3(s) = Ca^{2+}(aq) + CO_3^{2-}(aq)}$.

À saturation, les concentrations des ions sont $[Ca^{2+}]_{eq} = [CO_3^{2-}]_{eq} = s$.

Or par définition du produit de solubilité $K_s = [Ca^{2+}]_{eq} \times [CO_3^{2-}]_{eq} / (c^\circ)^2 = (s/c^\circ)^2$.

La solubilité vaut donc $\boxed{s = \sqrt{K_s c^\circ} = 7,5 \times 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}}$.

III.4) La solubilité réelle est plus élevée que celle que l'on vient de calculer en négligeant les propriétés acido-basiques des ions carbonate.

Or ceux-ci **réagissent dans l'eau** une fois dissous et se transforment en grande partie en ions hydrogénocarbonate qui dominant largement au pH des océans d'après le diagramme de prédominance.

La concentration des ions carbonate étant diminuée, celle des ions calcium doit augmenter afin en maintenir l'équilibre de dissolution, ce qui nécessite de dissoudre davantage de carbonate de calcium.

III.5) Si le pH diminue, p_s diminue donc s augmente. Ainsi, l'acidification des océans provoquée par l'augmentation des émissions de dioxyde de carbone a comme conséquence de rendre les organismes calcaires plus solubles, et conduit à leur fragilisation voire leur destruction à long terme.

Partie B. Cinétique de la dissolution du carbonate de calcium dans une solution acide

III.6) Les ions oxonium responsable de l'acidité faisant partie des réactifs, on peut effectuer un suivi par **pHmétrie**.

De plus, des ions sont impliqués dans la réaction donc la conductivité évolue également : on peut effectuer un suivi par **conductimétrie**.

III.7) D'après la stœchiométrie de la réaction, $\xi = n(CO_2)$.

En supposant le dioxyde de carbone comme parfait, on a $p_{CO_2}V = n(CO_2)RT$ donc $\boxed{\xi = \frac{p_{CO_2}V}{RT}}$.

On obtient $\boxed{\xi(t = 100 \text{ s}) = 2,89 \times 10^{-3} \text{ mol}}$, ce qui est en accord avec les autres résultats du tableau.

III.8) La vitesse de consommation des ions oxonium définie par $v_c(H_3O^+) = -\frac{d[H_3O^+]}{dt}$ est reliée à la vitesse v par la stœchiométrie de la réaction : $v_c(H_3O^+) = 2v$.

En supposant que $v = k[H_3O^+]^2$ on déduit que $[H_3O^+](t)$ vérifie l'équation différentielle :

$$-\frac{d[H_3O^+]}{dt} = 2k[H_3O^+]^2$$

Par séparation de variables,

$$-\frac{d[H_3O^+]}{[H_3O^+]^2} = 2k dt$$

que l'on intègre entre l'instant $t = 0$ où $[H_3O^+] = c_a$ et l'instant t :

$$\frac{1}{[H_3O^+](t)} - \frac{1}{c_a} = 2kt$$

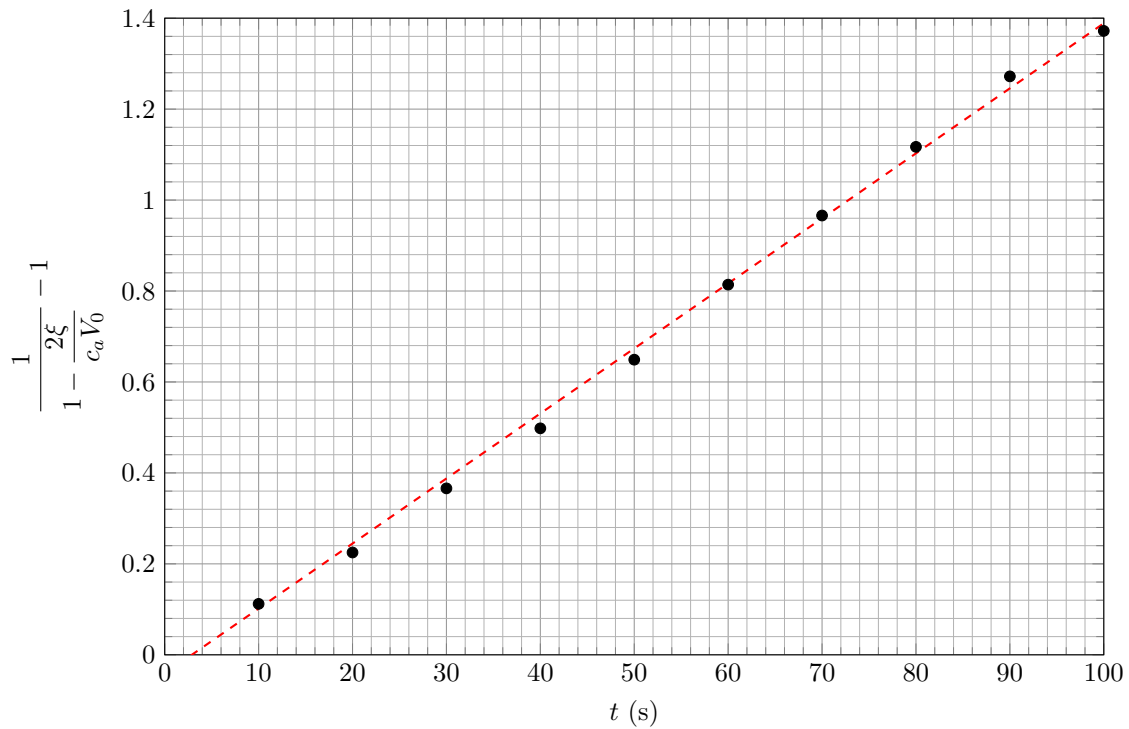
Or, $[H_3O^+](t) = c_a - 2\xi(t)/V_0$ et il vient :

$$\boxed{\frac{1}{1 - \frac{2\xi(t)}{c_a V_0}} - 1 = 2kc_a t}$$

Le membre de gauche est la grandeur qui est placée en ordonnée sur le graphe fourni en annexe. Ce graphe est assez bien modélisé par une fonction linéaire (l'écart à l'origine peut être dû à l'incertitude sur l'instant initial) et est donc compatible avec la loi de vitesse proposée.

Dans ce cadre, le coefficient directeur $a = 2kc_a$. Graphiquement on obtient $a = \frac{1,36}{95\text{ s}} = 1,43\text{ s}^{-1}$ donc la constante de vitesse

vaut $k = \frac{a}{2c_a} = 7,2 \times 10^{-2} \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$.



III.9) Dans les océans, la concentration des ions oxonium est de l'ordre de $1 \times 10^{-8} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, soit 10^7 fois moins que dans l'expérience réalisée. La vitesse de dissolution y est alors 10^{14} fois moindre. Ainsi la dissolution des coraux dans l'océan est très lente, ce qui nuance la conclusion de la première partie.

Attention cependant, ce qui importe est le temps de demi-réaction, qui est de l'ordre de $\frac{1}{2kc_a} \approx 7 \times 10^9 \text{ s}$ soit environ 23 ans. Ceci n'est pas si grand à l'échelle de l'évolution climatique. Le déclin des coraux est en fait déjà bien enclenché, ils sont quasiment condamnés à moyen terme.