

PROBLÈME I

L'arc-en-ciel

Lorsque le soleil éclaire les gouttes d'eau, on peut observer dans certaines conditions un arc-en-ciel.

On considère une goutte d'eau sphérique, de diamètre D et d'indice de réfraction n , située dans l'air d'indice $n_{\text{air}} = 1,000$. Soit un rayon lumineux incident, arrivant avec un angle d'incidence i (qui n'est pas nécessairement petit) sur la goutte. On note r l'angle de réfraction associé à l'angle d'incidence i .

On considère le rayon sortant de la goutte d'eau après une seule réflexion à l'intérieur de la goutte et deux réfractions à l'entrée et à la sortie de la goutte (figure 1) : ce rayon est à l'origine de l'arc-en-ciel principal. On observe parfois aussi un arc-en-ciel secondaire dû à une double réflexion à l'intérieur de la goutte.

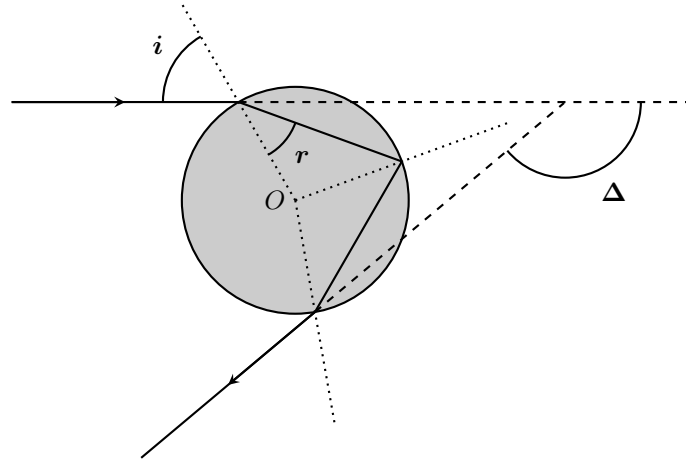


FIGURE 1 – Cas d'une réflexion et de deux réfractions

I.1) Rappeler les lois de Descartes de la réfraction et donner la relation entre les angles d'incidence i et de réfraction r .

I.2) Lors de la réflexion du rayon dans la goutte, y a-t-il également un rayon réfracté dans l'air ? Justifier.

I.3) La déviation est l'angle Δ dont il faut tourner le rayon incident pour l'amener sur le rayon émergent (voir figure).

Montrer que : $\Delta = \pi - 4r + 2i$.

Exprimer l'angle Δ en fonction de n et de $x = \sin(i)$.

I.4) Montrer que $\Delta(x)$ passe par un extremum lorsque x a pour valeur :

$$x_m = \sin(i_m) = \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}}$$

Donnée de la dérivée de arcsin : $\arcsin'(u) = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}}$.

La figure 2 page suivante représente l'angle de déviation Δ en fonction de l'angle d'incidence i pour un rayon de longueur d'onde $\lambda = 700 \text{ nm}$ (dans le vide).

I.5) Justifier à l'aide de la figure qu'on observe une accumulation de lumière dans la direction $\Delta_m = \Delta(x_m)$.

L'indice n de l'eau à 20°C vérifie la loi de Cauchy :

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2}$$

où λ est la longueur d'onde dans le vide, $A = 1,320$ et $B = 5191 \text{ nm}^2$.

I.6) Comment qualifie-t-on un tel milieu ? Calculer l'indice optique de l'eau pour deux radiations choisies l'une rouge et l'autre bleue.

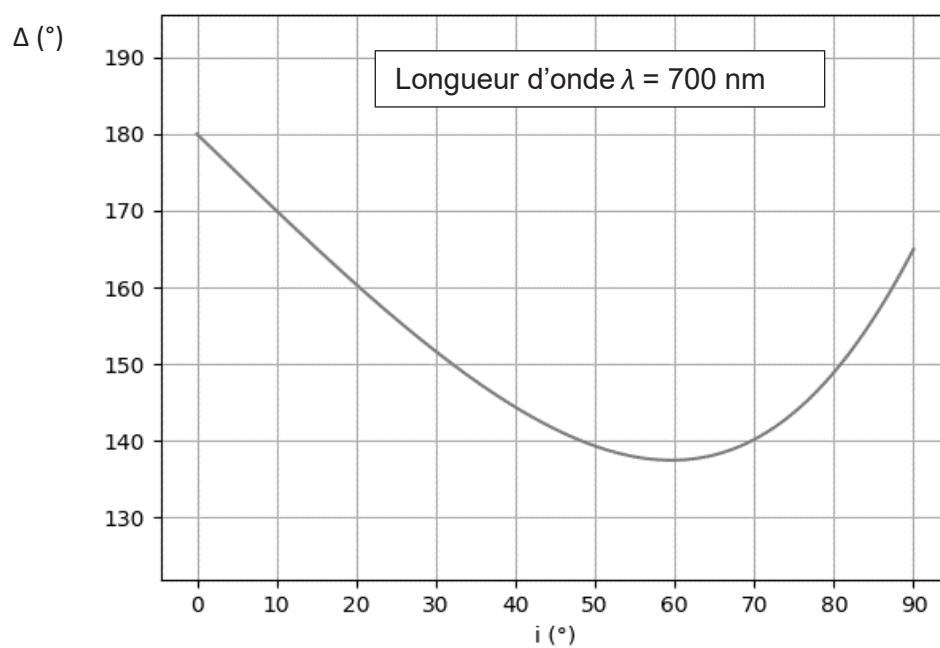


FIGURE 2 – Déviation en fonction de l'angle d'incidence

I.7) Déterminer x_m et Δ_m (en degrés) pour ces deux radiations.

I.8) Sur un schéma faisant apparaître les rayons incidents, parallèles, le rideau de pluie et l'œil de l'observateur, tracer les rayons émergents rouge et bleu dans la direction Δ_m . L'observateur observe-t-il le rouge à l'intérieur ou à l'extérieur de l'arc ?

PROBLÈME II

Microscope de fluorescence plein champ

La microscopie optique est un outil d'investigation essentiel en biologie car elle permet d'étudier les cellules vivantes, dans des conditions physiologiques. Afin de comprendre comment les événements biochimiques s'organisent au sein de la cellule, on a développé des techniques utilisant des marqueurs fluorescents permettant d'obtenir des images contrastées de structures et fonctions intracellulaires.

On considère que l'objet observé est constitué de molécules fluorescentes, c'est-à-dire capables d'absorber de la lumière d'une certaine couleur (par exemple bleue) et de réémettre de la lumière d'une autre couleur, correspondant à une longueur d'onde plus grande (par exemple verte). La lumière excitatrice (absorbée) et celle détectée (réémise) peuvent aisément être séparées à l'aide de filtres et de réflecteurs dichroïques.

Dans ce problème, on suppose qu'un système d'éclairage adéquat permet d'irradier uniformément l'échantillon d'une lumière bleue, et on ne s'intéresse qu'à la détection de la lumière verte émise par chaque molécule fluorescente.

La formation des images dans un microscope est réalisée à l'aide de deux systèmes optiques, l'objectif et la lentille de tube. On les assimile à des lentilles minces L_o et L_t , convergentes, de distances focales f'_o et f'_t , séparées de la distance $f'_o + f'_t$. La figure 3 schématise la situation étudiée.

Données :

- Distance focale de l'objectif : $f'_o = 4,0 \times 10^{-3} \text{ m}$
- Distance focale de la lentille de tube : $f'_t = 1,6 \times 10^{-1} \text{ m}$
- Ouverture numérique de l'objectif de microscope : $ON = 0,75$
- Taille d'un pixel de la caméra : $\delta = 1,0 \times 10^{-5} \text{ m}$
- Longueur d'onde d'émission de la protéine GFP (Green Fluorescent Protein) : $\lambda = 5,1 \times 10^{-7} \text{ m}$

Formulaire : relations de conjugaison et grandissement transversal pour une lentille mince de distance focale f' , de centre optique O , de foyer objet F , de foyer image F' , A et A' étant deux points conjugués appartenant à l'axe optique

$$\text{Descartes} \begin{cases} \frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{f'} \\ \gamma = \frac{OA'}{OA} \end{cases} \quad \text{Newton} \begin{cases} \overline{F'A'} \overline{FA} = -(f')^2 \\ \gamma = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}} \end{cases}$$

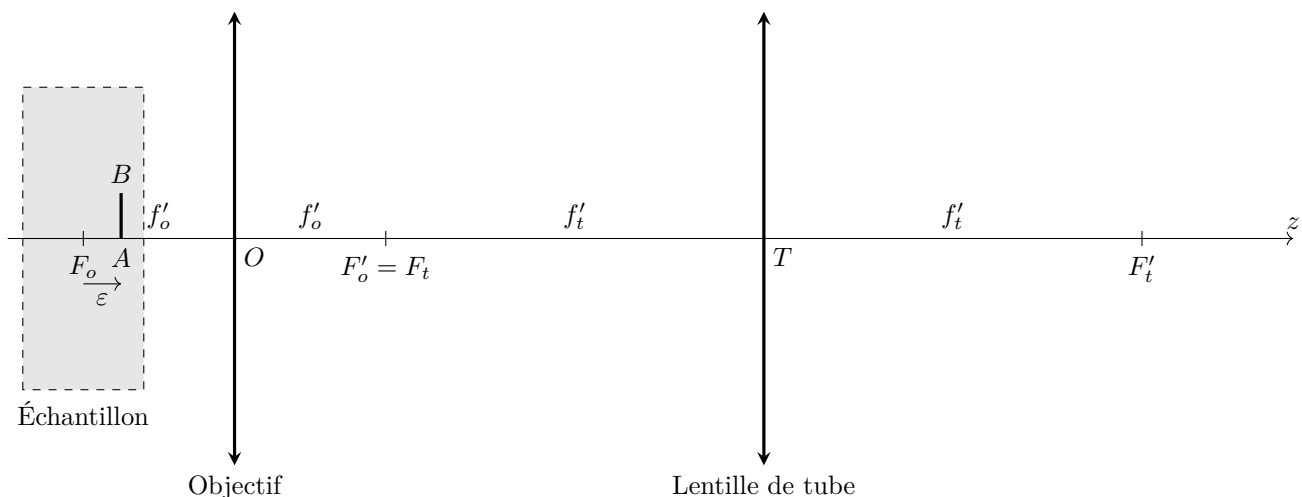


FIGURE 3 – Schéma du microscope (montage dit « $4f$ »)

II.1) Considérons deux molécules fluorescentes A et B de l'échantillon, situées dans un même plan transversal. La molécule A se situe sur l'axe optique et est repérée par sa coordonnée ε par rapport au foyer objet F_o de l'objectif ($\varepsilon > 0$ lorsque A est à droite de F_o). En traçant deux rayons issus du point B , construire les images géométriques A'' et B'' de ces molécules à travers le système formé des deux lentilles. Ces tracés devront être effectués sur la copie, en s'inspirant de la géométrie de la figure 3.

II.2) Dédurre de cette construction l'expression du grandissement transversal $\gamma_t = \frac{\overline{A''B''}}{\overline{AB}}$ du microscope. Donner sa valeur numérique. Interpréter son signe.

II.3) On note $\varepsilon'' = \overline{F'_t A''}$ la distance algébrique entre le foyer image de la lentille de tube et le plan des images A'' et B'' . Établir la relation de conjugaison :

$$\varepsilon'' = \left(\frac{f'_t}{f'_o} \right)^2 \varepsilon$$

II.4) Le photodétecteur d'une caméra est placé dans le plan focal image de L_t . Indiquer alors où se situent les points de l'échantillon dont l'image apparaît nette sur ce détecteur.

II.5) Calculer la distance minimale $\Delta_p x$ (résolution) séparant deux molécules fluorescentes que devrait en principe pouvoir distinguer la caméra. On considèrera que son détecteur est formé d'un réseau de pixels contigus (de taille δ).

La résolution du microscope n'est pas limitée seulement par la résolution du détecteur, mais également par la diffraction, phénomène non décrit par l'optique géométrique. Ainsi, toute onde se propageant à travers un système qui limite son extension latérale subit une divergence à sa sortie. Dans le cas du microscope « 4f », la limitation latérale du faisceau peut se modéliser par un diaphragme de diamètre D situé dans le plan focal image de l'objectif. L'image d'un point A est alors une tache lumineuse, dite tache de diffraction, centrée sur son image géométrique A'' . Son diamètre s'exprime ici $\Delta x'' \approx \lambda f'_t / D$, où λ désigne la longueur d'onde de la lumière émise par fluorescence.

On considère alors que le faisceau, après la lentille de tube, est un cône convergent puis divergent, modifié à son sommet par un cylindre de diamètre $\Delta x''$, sur une longueur $\Delta z''$ (forme de sablier), tel qu'illustré figure 4. On se propose ici de décrire les limitations de résolution du microscope qui en découlent.

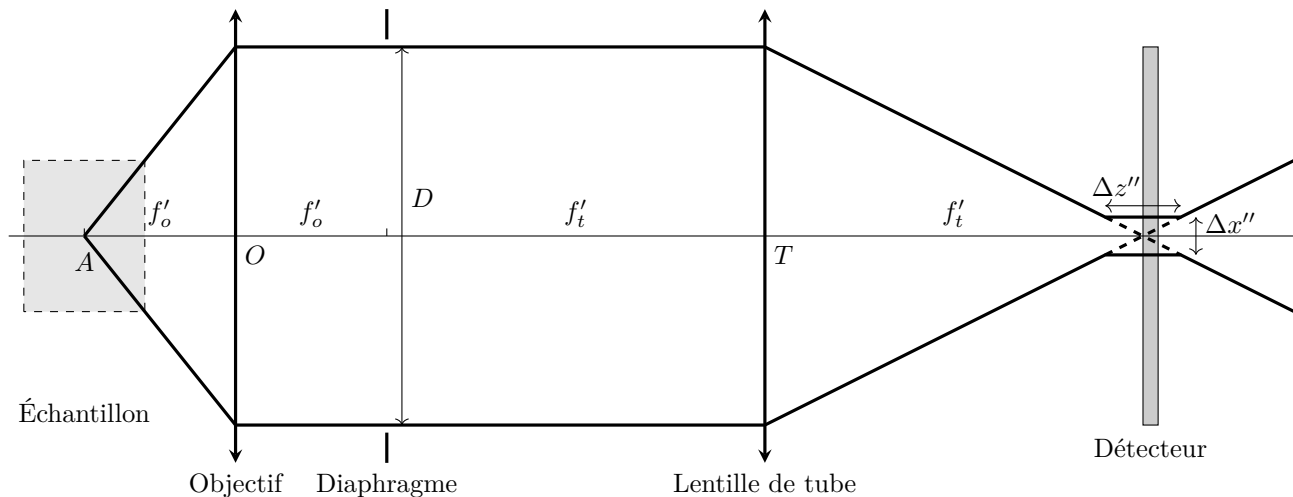


FIGURE 4 – Modélisation géométrique de l'effet de la diffraction, causée par le diaphragme D, en sortie du microscope.

II.6) En adoptant comme critère que deux points A et B sont discernables si leurs taches de diffraction ne se recouvrent pas sur le détecteur, déterminer la limite de résolution latérale Δx dans l'échantillon. L'exprimer en fonction de λ et de l'ouverture numérique $ON = D/(2f'_o)$ de l'objectif.

II.7) Exprimer $\Delta z''$ en fonction de $\Delta x''$, f'_t et D , puis de λ , f'_t et D .

La résolution axiale Δz du microscope, aussi appelée profondeur de champ, est la distance le long de l'axe optique sur laquelle les molécules fluorescentes produisent des taches lumineuses sur le détecteur dont la taille reste égale à $\Delta x''$.

II.8) En considérant que $|\varepsilon| \ll f'_o$ et qu'alors la géométrie du faisceau lumineux arrivant sur le détecteur reste celle du sablier (évoqué précédemment), mais translatée axialement de ε'' , déterminer Δz en fonction de λ et ON .

II.9) Calculer les valeurs de Δx et Δz pour des protéines fluorescentes GFP.

Comparer la résolution latérale limitée par la diffraction à celle limitée par la pixelisation du détecteur (question II.5)).

PROBLÈME III

Carbonate de calcium

Le carbonate de calcium CaCO_3 est le composé majeur des roches calcaires comme la craie mais également du marbre. C'est le constituant principal des coquilles d'animaux marins, du corail et des escargots. Il est très peu soluble dans l'eau pure mais beaucoup plus soluble dans une eau chargée en dioxyde de carbone.

Données à 298 K :

- constantes d'acidité : $K_a(\text{H}_2\text{CO}_3(\text{aq})/\text{HCO}_3^-(\text{aq})) = 10^{-6,37}$; $K_a(\text{HCO}_3^-(\text{aq})/\text{CO}_3^{2-}(\text{aq})) = 10^{-10,32}$
- produit de solubilité du carbonate de calcium : $K_s = 10^{-8,25}$
- constante des gaz parfaits : $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

Partie A. Solubilité du carbonate de calcium

III.1) Donner un schéma de Lewis de l'ion carbonate CO_3^{2-} , de l'ion hydrogénocarbonate HCO_3^- et de l'acide carbonique H_2CO_3 .

III.2) Établir le diagramme de prédominance des différentes espèces carbonatées : ion carbonate, ion hydrogénocarbonate, acide carbonique.

III.3) Écrire l'équation de la réaction de dissolution du carbonate de calcium dans l'eau en négligeant les propriétés basiques des ions carbonate. Exprimer dans ce cas la solubilité s du carbonate de calcium et calculer sa valeur à 298 K.

III.4) Dans les océans, dont le pH est actuellement compris entre 8,0 et 8,3, la solubilité du carbonate de calcium est de l'ordre de $1 \text{ mmol} \cdot \text{L}^{-1}$. Proposer une explication quant à la valeur différente obtenue dans la question précédente.

On donne en figure 5 le graphe de $ps = -\log(s/c^\circ)$ en fonction du pH.

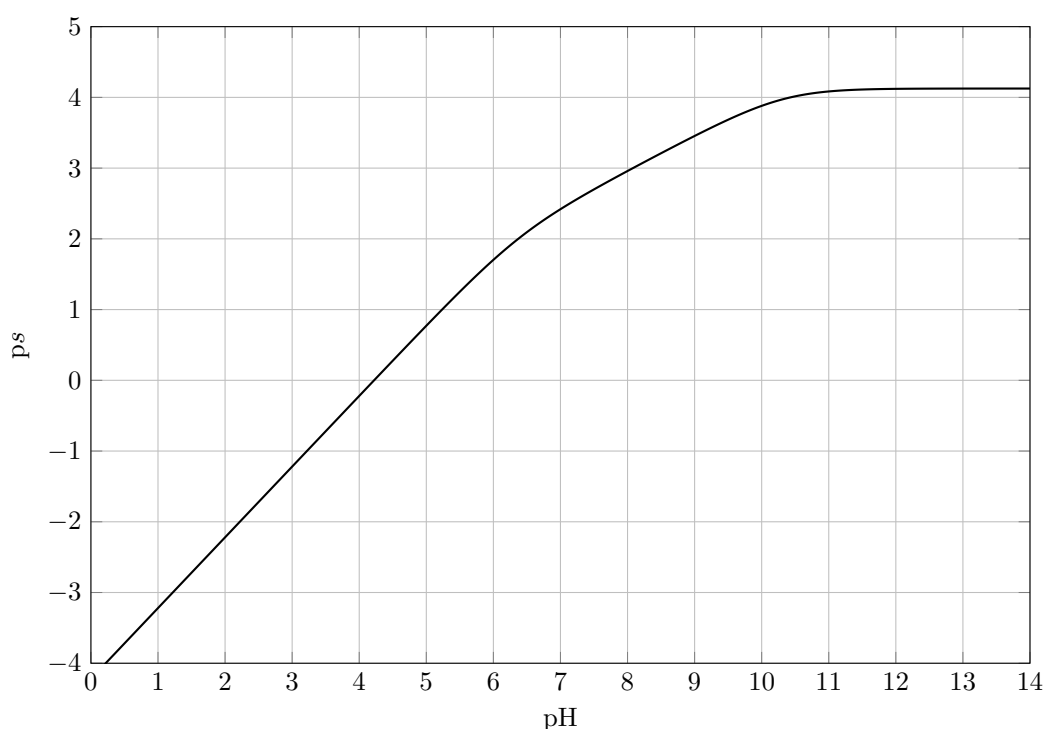


FIGURE 5 – Solubilité du carbonate de calcium en fonction du pH

III.5) Le dioxyde de carbone émis dans l'atmosphère se dissout en partie dans l'eau, ce qui conduit à une acidification des océans. Dédurre de ce graphe l'effet de l'augmentation des émissions de dioxyde de carbone sur les organismes calcaires de l'océan.

Partie B. Cinétique de la dissolution du carbonate de calcium dans une solution acide

On étudie l'évolution de la réaction entre le carbonate de calcium $\text{CaCO}_3(\text{s})$ et un volume $V_0 = 100 \text{ mL}$ d'une solution d'acide chlorhydrique de concentration $c_a = 0,100 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

L'équation de la réaction s'écrit :



On mesure la pression du dioxyde de carbone apparu en utilisant un capteur de pression différentiel. Le gaz occupe un volume $V = 1,0 \text{ L}$ à la température de 25°C . Les résultats sont regroupés dans le tableau ci-dessous.

$t \text{ (s)}$	10,0	20,0	30,0	40,0	50,0	60,0	70,0	80,0	90,0	100,0
$p_{\text{CO}_2} \text{ (Pa)}$	1250	2280	3320	4120	4880	5560	6090	6540	6940	7170

III.6) Citer deux autres méthodes de suivi cinétique que l'on aurait pu envisager pour cette réaction. Justifier.

III.7) Établir la relation entre l'avancement ξ de la réaction et p_{CO_2} . Effectuer l'application numérique à $t = 100 \text{ s}$ afin de compléter le tableau de valeurs suivant.

$t \text{ (s)}$	0	10,0	20,0	30,0	40,0	50,0	60,0	70,0	80,0	90,0	100,0
$\xi \text{ (mmol)}$	0	0,50	0,92	1,34	1,66	1,97	2,24	2,46	2,64	2,80	

On trace dans la figure 6 de l'annexe le graphe de $\frac{1}{1 - \frac{2\xi}{c_a V_0}} - 1 = f(t)$.

III.8) Montrer que ce graphe est compatible avec une loi de vitesse $v = k[\text{H}_3\text{O}^+]^2$. En déduire la valeur de la constante de vitesse k . On effectuera les constructions graphiques nécessaires sur le graphe en annexe que l'on rendra avec la copie.

III.9) Que pensez-vous quant à la vitesse de dissolution des coraux dans les océans ?

ANNEXE à rendre avec la copie

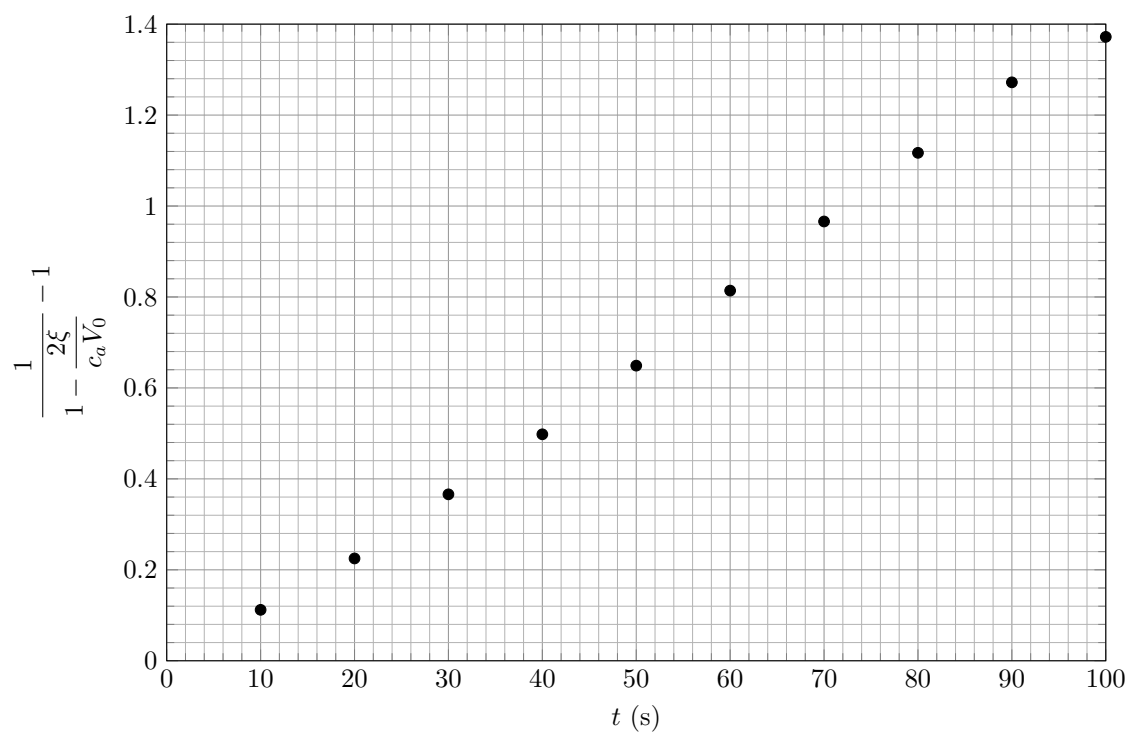


FIGURE 6 – Graphe de $\frac{1}{1 - \frac{2\xi}{c_a V_0}} - 1 = f(t)$