

Fiche 54 : Développements divers.

Exercice 1

Calculer :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (3(2)^{\frac{1}{n}} - 2(3)^{\frac{1}{n}})^n$$

$$\lim_{x \rightarrow e} \frac{x^x - x^e}{e^x - e^e}$$

Exercice 2

Donner un équivalent simple de $\arccos(1 - h)$ pour $h \rightarrow 0^+$ en utilisant le développement de $\cos$ pour $x \rightarrow 0$.

Exercice 3

1. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $\tan(x) = x$ possède une unique solution notée x_n dans $]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[$ ($n \in \mathbb{N}$).
2. Donner un développement de précision $o(1/n)$ de x_n en fonction de n pour $n \rightarrow \infty$.
3. Obtenir un développement de x_n de précision $o(1/n^2)$ de x_n en fonction de n pour $n \rightarrow \infty$.

Exercice 4

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, et $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on note : $f_n(x) = x \cos^n(x)$. Soit $x_n \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tel que $f_n(x_n)$ soit maximal.

1. Montrer l'existence et l'unicité de x_n .
2. Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.
3. Montrer que $x_n^2 \sim \frac{1}{n}$.
4. Trouver un équivalent simple de $f_n(x_n)$.

Exercice 5

Soit f une fonction de classe C^2 positive sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que en tout point x_0 tel que $f(x_0) = 0$ alors $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) \geq 0$.
2. Montrer que si $\sqrt{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ alors, en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$: $f''(x_0) = 0$.
3. Montrer que si, en tout point x_0 tel que $f(x_0) = 0$ alors $f''(x_0) = 0$, alors $\sqrt{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On pourra utiliser la formule de Taylor Young.