

Fiche 55 : TD du 13-03.

Exercice 1

1. Déterminer le développement limité en 0 de la fonction $x \rightarrow \sin(\exp(x))$ à l'ordre 3 :

$$\sin(\exp(x)) = \dots + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$$

2. Déterminer le développement limité en 0 de la fonction $x \rightarrow \arctan(\sin(x))$ à l'ordre 3 :

$$\arctan(\sin(x)) = \dots + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$$

3. Déterminer le développement limité en 0 de la fonction $x \rightarrow \arctan(\cos(x))$ à l'ordre 4 :

$$\arctan(\cos(x)) = \dots + o_{x \rightarrow 0}(x^4)$$

Exercice 2

Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) - \sin x}{x^3} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{1 - x^2}}{x^4}$$

Exercice 3

Exercice 4

On considère la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{1}{1 + 3x + 2x^2}$$

1. Préciser le domaine de définition D_f de f .
2. Déterminer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de f .
3. Décomposer f en éléments simples et retrouver le résultat précédent.
4. Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur D_f et en déduire que f admet un développement à tout ordre $n \in \mathbb{N}$ en 0. Préciser $f^{(n)}(x)$ pour $x \in D_f$.
5. Écrire le développement de f à tout ordre n en 0. On donnera le résultat sous la forme $f(x) = 1 - 3x + \dots + a_n x^n + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$ en précisant a_n en fonction de n .

Exercice 5

On considère la fonction :

$$f(x) = \frac{1}{1 - (x + x^2)}$$

(Dans cet exercice, il n'est pas utile de faire de décomposition en éléments simples de f)

1. Donner le domaine de définition D_f de f et justifier (sans les calculer) que f admet en 0 des développements limités à tous les ordres en 0.
2. Donner le développement en 0 de f à l'ordre 5.
3. On fixe $n > 5$ et on note $f(x) = \sum_{k=0}^n F_k x^k + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$ le développement à l'ordre n de f .
 - (a) Préciser les valeurs de $F_0, \dots, F_5$.
 - (b) Éventuellement en considérant la fonction $x \rightarrow x.f(x) + x^2.f(x)$, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

4. Donner un équivalent élémentaire de $f(x)$ pour $x \rightarrow +\infty$ puis un développement de $f(x)$ pour $x \rightarrow +\infty$ de précision $o\left(\frac{1}{x^4}\right)$