

Fiche 56 : Fonctions convexes.

Exercice 1

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x \operatorname{ch}(x)$.

1. Montrer que f définit une bijection impaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note g sa réciproque.
2. Justifier que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer le développement limité à l'ordre 5 de f en 0.
4. Déterminer le développement à l'ordre 5 de g en 0 (*On pourra le chercher sous forme de coefficients indéterminés*).
5. Montrer que $g(y) \sim \ln(y)$ pour $y \rightarrow +\infty$.
6. Donner un équivalent élémentaire de $g(y) - \ln(y)$ pour $y \rightarrow \infty$.

Exercice 2

Montrer que si $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}_+^{*n}$ alors

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}$$

On pourra utiliser la concavité de la fonction $\ln$.

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexe et continue. Montrer que l'on a :

- soit f est croissante sur $\mathbb{R}$.
- soit f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
- soit il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que f est décroissante sur $] -\infty, a]$, puis croissante sur $[a, +\infty[$.

Exercice 4

1. Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ convexe, continue et bornée. Montrer que f est décroissante.
2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexe, continue et bornée. Montrer que f est constante.

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexe, continue telle que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote d'équation $y = mx + p$ en $+\infty$. Montrer que $\mathcal{C}_f$ est au dessus de cette asymptote.