

Calcul asymptotique

Fonctions convexes

Plan

1	Comparaison des suites et des fonctions	1
1.1	Suite dominée, négligeable par rapport à une autre	1
1.2	Équivalence de 2 suites	3
1.3	Fonction dominée, négligeable par rapport à une autre	4
1.4	Équivalence	5
1.5	Équivalents classiques	6
2	Formule de Taylor, développements limités	6
3	Quelques applications	10
4	Fonctions convexes	10

1 Comparaison des suites et des fonctions

1.1 Suite dominée, négligeable par rapport à une autre

Soit $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels (éventuellement de complexes).

Définition 1 On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **dominée** par la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quand il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que il existe $N \in \mathbb{N}$ pour tout $n \geq N$:

$$|u_n| \leq M|\alpha_n|$$

On note alors :

$$u_n = O(\alpha_n)$$

(Se lit : "grand O").

On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **négligeable** devant la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quand il existe une suite (M_n) convergeant vers 0 tel que, il existe $N \in \mathbb{N}$ pour tout $n \geq N$:

$$|u_n| \leq M_n |\alpha_n|$$

On note alors :

$$u_n = o(\alpha_n)$$

(Se lit : "petit o").

D'abord quelques critères bien pratiques :

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $u_n = O(1)$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 si et seulement si $u_n = o(1)$.

Propriété 1 Si la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas (au moins à partir d'un certain rang) alors $u_n = O(\alpha_n)$ si et seulement si la suite $\left(\frac{u_n}{\alpha_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée (au moins à partir d'un certain rang).

Si la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas (au moins à partir d'un certain rang) alors $u_n = o(\alpha_n)$ si et seulement si la suite $\left(\frac{u_n}{\alpha_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ (définie au moins à partir d'un certain rang) tend vers 0.

On a les règles opératoires suivantes $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des suites.

Propriété 2 • Si $u_n = o(\alpha_n)$ alors $u_n = O(\alpha_n)$.

- Si $u_n = O(\alpha_n)$ et $v_n = O(\alpha_n)$ alors $u_n + v_n = O(\alpha_n)$.
- Si $u_n = o(\alpha_n)$ et $v_n = o(\alpha_n)$ alors $u_n + v_n = o(\alpha_n)$.
- Si $u_n = o(\alpha_n)$ et $v_n = O(\alpha_n)$ alors $u_n + v_n = O(\alpha_n)$.
- Si $u_n = O(\alpha_n)$ et $v_n = O(\beta_n)$ alors $u_n \cdot v_n = O(\alpha_n \cdot \beta_n)$.
- Si $u_n = o(\alpha_n)$ et $v_n = O(\beta_n)$ alors $u_n \cdot v_n = o(\alpha_n \cdot \beta_n)$.
- Si $u_n = o(\alpha_n)$ et $\beta_n = o(\alpha_n)$ alors $u_n = o(\alpha_n - \beta_n)$.
- Si $u_n = o(\alpha_n)$ et $\alpha_n = O(\beta_n)$ alors $u_n = o(\beta_n)$.

Les exemples de base, à connaître par coeur, sont les suivants :

Propriété 3 Si $0 < |a| < 1$ et α, β sont strictement positifs :

$$a^n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \quad , \quad \frac{1}{n^\alpha} = o\left(\frac{1}{\ln^\beta(n)}\right).$$

Si $a > 1$ et α, β sont strictement positifs :

$$\ln^\beta(n) = o(n^\alpha) \quad , \quad n^\alpha = o(a^n).$$

On dit que "l'exponentielle l'emporte sur qui l'emporte sur la puissance qui l'emporte sur le log".

Propriété 4 Si $0 < |a| < |b|$, alors :

$$a^n = o(b^n).$$

Si $\alpha < \beta$, alors :

$$n^\alpha = o(n^\beta) \text{ et } \ln^\alpha(n) = o(\ln^\beta(n))$$

Si $\alpha < \beta$, alors :

$$\frac{1}{n^\beta} = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \text{ et } \frac{1}{\ln^\beta(n)} = o\left(\frac{1}{\ln^\alpha(n)}\right).$$

1.2 Équivalence de 2 suites

Définition 2 On considère 2 suites réelles (ou complexes) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont **équivalentes** et on note :

$$u_n \sim v_n$$

quand l'une des conditions équivalentes suivantes est réalisée :

- $u_n = v_n + w_n$ avec $w_n = o(v_n)$.
- $v_n = u_n + w_n$ avec $w_n = o(u_n)$.
- $v_n - u_n = o(u_n)$.
- $v_n - u_n = o(v_n)$.

Un critère bien pratique :

Propriété 5 Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont à termes non nuls (éventuellement à partir d'un certain rang) :

$$u_n \sim v_n \iff \frac{u_n}{v_n} \rightarrow 1$$

En particulier 2 suites réelles équivalentes ont même signe à partir d'un certain rang.

Les règles opératoires associées sont les suivantes ($(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des suites à termes non nuls à partir d'un certain rang) :

Propriété 6 • $u_n \sim u_n$.

- Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$ alors $u_n \sim w_n$.
- Si $u_n \sim v_n$ alors $v_n \sim u_n$.
- Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n \sim w_n$ alors $u_n = o(w_n)$.
- Si $u_n + w_n \sim v_n$ et $w_n = o(v_n)$ alors $u_n \sim v_n$.

- Si $u_n \sim v_n + w_n$ et $w_n = o(v_n)$ alors $u_n \sim v_n$.
- Si $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim t_n$ alors :

$$u_n \cdot w_n \sim v_n \cdot t_n$$

et

$$\frac{u_n}{w_n} \sim \frac{v_n}{t_n}.$$

- Si $u_n \sim v_n$ et $k \in \mathbb{Z}$ alors :

$$u_n^k \sim v_n^k$$

- Si $u_n \sim v_n$ sont à termes strictement positifs et $\alpha \in \mathbb{R}^*$ alors :

$$u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$$

Une application importante des équivalents est le calcul des limites notamment avec la propriété suivante :

Propriété 7 Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des suites :

- Si $l \in \mathbb{C}^*$, $u_n \sim l$ est équivalent à $u_n \rightarrow l$.
- Si $u_n \sim v_n$ et $u_n \rightarrow l$ (l fini ou infini) alors $u_n \rightarrow l$.

1.3 Fonction dominée, négligeable par rapport à une autre

On considère ici a un point de $\mathbb{R} \cup \pm\infty$.

Soit f, ϕ deux fonctions définies au voisinage de a .

Définition 3 On dit que la fonction f est **dominée** par la fonction ϕ au voisinage de a quand il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que au voisinage de a :

$$|f(x)| \leq M|\phi(x)|$$

On note alors :

$$f = O_a(\phi) \quad \text{ou} \quad f(x) = O_{x \rightarrow a}(\phi(x))$$

On dit que la fonction $f(x)$ est **négligeable** devant la fonction ϕ en a quand il existe une fonction M définie au voisinage de a , tendant vers 0 en a telle que :

$$|f(x)| \leq M(x) \cdot |\phi(x)|$$

On note alors :

$$f = o_a(\phi) \quad \text{ou} \quad f(x) = o_{x \rightarrow a}(\phi(x))$$

Propriété 8 Si ϕ ne s'annule pas au voisinage de a alors :

1. $f(x) = O_{x \rightarrow a}(\phi(x))$ si et seulement $\frac{f(x)}{\phi(x)}$ est bornée au voisinage de a .
- $f(x) = o_{x \rightarrow a}(\phi(x))$ si et seulement $\frac{f(x)}{\phi(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$.

Les règles opératoires sont tout à fait analogue à celle des suites.

Les exemples de base, à connaître par coeur, sont les suivants :

Propriété 9 Si $0 < a < 1$ et α, β sont strictement positifs :

$$a^x = \underset{x \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{x^\alpha} \right) , \quad \frac{1}{x^\alpha} = \underset{x \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{\ln^\beta(x)} \right).$$

Si $a > 1$ et α, β sont strictement positifs :

$$\ln^\beta(x) = \underset{x \rightarrow +\infty}{o} (x^\alpha) , \quad x^\alpha = \underset{x \rightarrow +\infty}{o} (a^x)$$

On dit que "l'exponentielle l'emporte sur la puissance qui l'emporte sur le log".

Si $\alpha < \beta$ sont 2 réels :

$$x^\alpha = \underset{x \rightarrow +\infty}{o} (x^\beta)$$

Si $0 < a < b$ sont 2 réels :

$$a^x = \underset{x \rightarrow +\infty}{o} (b^x)$$

Si α, β sont strictement positifs :

$$\ln^\beta(x) = \underset{x \rightarrow 0^+}{o} \left(\frac{1}{x^\alpha} \right)$$

Si $\alpha < \beta$ sont 2 réels :

$$x^\beta = \underset{x \rightarrow 0^+}{o} (x^\alpha)$$

1.4 Équivalence

Définition 4 On considère fonctions f et g définies au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R} \cup \pm\infty$.

On dit que f et g sont **équivalentes** en a et on note :

$$f(x) \sim_a g(x) \quad \text{ou} \quad f(x) \sim_{x \rightarrow a} g(x)$$

quand l'une des conditions équivalentes suivantes est réalisée :

- $f(x) = g(x) + h(x)$ avec $h(x) = o_a(g(x))$.
- $g(x) = f(x) + h(x)$ avec $h(x) = o_a(f(x))$.
- $g(x) - f(x) = o_a(g(x))$.
- $g(x) - f(x) = o_a(f(x))$.

Propriété 10 Si f et g ne s'annulent pas au voisinage de a alors :

$$f(x) \sim_a g(x) \quad \text{si et seulement si} \quad \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 1$$

Les règles opératoires associées sont tout à fait analogues à celles des suites.

Un polynôme est équivalent à son terme dominant, une fraction rationnelle au quotient du terme dominant de son numérateur par son celui de son dénominateur.

Les équivalents servent, entre autre, à calculer les limites à l'aide de la proposition suivante.

Propriété 11 $f(x) \sim_a l \in \mathbb{R}^*$ si et seulement si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$.

Si $f(x) \sim_a g(x)$ et g a une limite l (finie ou infinie) en a alors f a la limite l en a .

1.5 Équivalents classiques

Les équivalents concernant les fonctions élémentaires sont à connaître par coeur :

$$\begin{aligned} \sin(x) &\sim_{x \rightarrow 0} x \\ \tan(x) &\sim_{x \rightarrow 0} x \\ \arcsin(x) &\sim_{x \rightarrow 0} x \\ \arctan(x) &\sim_{x \rightarrow 0} x \\ \operatorname{sh}(x) &\sim_{x \rightarrow 0} x \\ \operatorname{th}(x) &\sim_{x \rightarrow 0} x \end{aligned}$$

Pas explicitement au programme donc à savoir redémontrer :

Propriété 12 (Propriété de composition) Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle tendant vers $l \in \overline{\mathbb{R}}$ et f et g sont 2 fonctions définies au voisinage de l et vérifiant $f(x) \sim_{x \rightarrow l} g(x)$ pour alors :

$$f(u_n) \sim_{n \rightarrow \infty} g(u_n)$$

Propriété 13 (Complément) Si deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendent vers 0^+ ou $+\infty$ et $u_n \sim v_n$ alors :

$$\ln(u_n) \sim_{n \rightarrow \infty} \ln(v_n)$$

2 Formule de Taylor, développements limités

On donne ici des outils importants (développements limités) à partir des formules de Taylor. Les justifications des formules de Taylor seront apportées au chapitre *intégration*.

On considère une fonction f définie au voisinage d'un point a .

Définition 5 On dit que la fonction f admet un **développement limité** d'ordre $n \in \mathbb{N}$ en a si on peut écrire :

$$f(a+h) = b_0 + h.b_1 + h^2.b_2 + \dots + b_n.h^n + o_{h \rightarrow 0}(h^n)$$

avec $(b_0, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, autrement dit s'il existe un polynôme P de degré n tel que :

$$f(a+h) = P(h) + o_{h \rightarrow 0}(h^n)$$

Le polynôme P s'appelle la **partie principale** du développement limité ou simplement **développement limité**. La quantité $f(a+h) - P(h)$ s'appelle le **reste**.

Le développement précédent est dit écrit sous **forme normalisée** si

$$f(a+h) = h^p(a_0 + h.a_1 + h^2.a_2 + \dots + a_n.h^n + o_{h \rightarrow 0}(h^n))$$

avec $a_0 \neq 0$. Dans ce cas pour $h \rightarrow 0$: $f(a+h) \sim a_0 h^p$.

Propriété 14 Si une fonction f admet un développement limité à l'ordre n en a , celui-ci est unique. Dans ce cas, elle admet en a un développement limité à tout ordre m inférieur à n qui est obtenu en supprimant tous les termes de degrés supérieurs à $m+1$ dans le développement de f à l'ordre n (troncature à l'ordre n).

Notons, cela simplifie certains calculs, que si la fonction f est paire (resp. impaire) et développable à l'ordre n en 0 alors son développement limité est un polynôme pair (resp. impair).

Les développements limités des fonctions élémentaires sont obtenus grâce à la **formule de Taylor** qui sera prouvée dans un chapitre ultérieur :

Théorème 1 (Formule de Taylor) Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage de a alors elle admet un développement limité à l'ordre n en a . Plus précisément :

$$f(a+h) = f(a) + f'(a).h + \frac{f^{(2)}(a)}{2}.h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.h^n + o_{h \rightarrow 0}(h^n) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + o_{h \rightarrow 0}(h^n)$$

ou, en notation différentielle :

$$f(a+h) = f(a) + \frac{df}{dx}(a).h + \frac{\frac{d^2 f}{dx^2}(a)}{2}.h^2 + \dots + \frac{\frac{d^n f}{dx^n}(a)}{n!}.h^n + o_{h \rightarrow 0}(h^n) = \sum_{k=0}^n \frac{\frac{d^k f}{dx^k}(a)}{k!} .h^k + o_{h \rightarrow 0}(h^n)$$

On obtient ainsi les développements suivant (en 0) à connaître par cœur ! (n est un entier non nul) :

- $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \underset{x \rightarrow 0}{O}(x^{n+1}),$
- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \underset{x \rightarrow 0}{O}(x^{n+1}),$
- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \underset{x \rightarrow 0}{O}(x^{n+1}),$
- $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{x \rightarrow 0}{O}(x^{2n+2}),$
- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \underset{x \rightarrow 0}{O}(x^{2n+1}),$
- $\operatorname{sh}(x) = x + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{x \rightarrow 0}{O}(x^{2n+2}),$
- $\operatorname{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \underset{x \rightarrow 0}{O}(x^{2n+1}),$
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \underset{x \rightarrow 0}{O}(x^{n+1}),$
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \underset{x \rightarrow 0}{O}(x^{n+1}),$
- $\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \underset{x \rightarrow 0}{O}(x^{2n+2}).$
- $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \underset{x \rightarrow 0}{O}(x^5).$

Les développements limités des autres fonctions sont obtenus par application des règles opératoires qui suivent.

Propriété 15 *Si les fonctions f et g admettent des développements limités à l'ordre n en a et si :*

$$f(a+h) = b_0 + h.b_1 + h^2.b_2 + \cdots + b_n.h^n + \underset{h \rightarrow 0}{O}(h^{n+1})$$

$$\text{et } g(a+h) = c_0 + h.c_1 + h^2.c_2 + \cdots + c_n.h^n + \underset{h \rightarrow 0}{O}(h^{n+1}) \text{ alors :}$$

- $\lambda.f(a+h) = \lambda b_0 + h.\lambda b_1 + h^2.\lambda b_2 + \cdots + \lambda b_n.h^n + \underset{h \rightarrow 0}{O}(h^{n+1}),$
- $(f+g)(a+h) = b_0 + c_0 + h.(b_1 + c_1) + h^2.(b_2 + c_2) + \cdots + (b_n + c_n).h^n + \underset{h \rightarrow 0}{O}(h^{n+1}),$
- $f.g(a+h) = [(b_0 + h.b_1 + h^2.b_2 + \cdots + b_n.h^n).(c_0 + h.c_1 + h^2.c_2 + \cdots + c_n.h^n)]_n + \underset{h \rightarrow 0}{O}(h^{n+1}).$

où $[P(x)]_n$ est le polynôme obtenu en supprimant tous les termes de degrés $> n$ dans le polynôme P (troncature à l'ordre n).

Ainsi l'ensemble des fonctions ayant un développement limité à l'ordre n en a est un sous espace vectoriel de l'ensemble des fonctions définies au voisinage de a .

Propriété 16 Si la fonction f admet un développement limité à l'ordre n en a et si la fonction g admet un développement limité à l'ordre n en $f(a)$ alors la fonction $g \circ f$ admet un développement limité à l'ordre n en a . Plus précisément :

Si $f(a+h) = P(h) + o_{h \rightarrow 0}(h^n)$ ($P \in \mathbb{R}_n[x]$) et $g(f(a)+H) = Q(H) + o_{H \rightarrow 0}(H^n)$ ($Q \in \mathbb{R}_n[x]$) alors :

$$g(f(a+h)) = [Q(P(h))]_n + o_{h \rightarrow 0}(h^n)$$

$[Q(P(h))]_n$ est la troncature à l'ordre n de la composée des polynômes P et Q .

Concernant le passage dérivée-primitive, on obtient :

Propriété 17 Si la fonction f est une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ admettant un développement limité à l'ordre $n+1$ en a : $f(a+h) = P(h) + o_{h \rightarrow 0}(h^{n+1})$ ($P \in \mathbb{R}_{n+1}[x]$) alors la fonction f' admet un développement limité à l'ordre n en a sous la forme :

$$f'(a+h) = P'(h) + o_{h \rightarrow 0}(h^n)$$

Réciproquement, si la fonction f continue admet un développement limité à l'ordre n en a sous la forme : $f(a+h) = P(h) + o_{h \rightarrow 0}(h^n)$ ($P \in \mathbb{R}_n[x]$) et si la fonction F est une primitive de f alors F admet un développement limité à l'ordre $n+1$ en a . Plus précisément :

$$F(a+h) = F(a) + \int_0^h P(u)du + o_{h \rightarrow 0}(h^{n+1})$$

En pratique, on dispose donc des outils suivants pour calculer les développements limités (par ordre de préférence) :

- utiliser la linéarité,
- utiliser un produit,
- faire apparaître une primitive, une dérivée,
- faire apparaître un quotient et utiliser le développement de $\frac{1}{1-x}$,
- faire apparaître une composée,
- rechercher le développement par coefficients indéterminés.
- utiliser la formule de Taylor (seulement en dernier recours!).

3 Quelques applications

Les applications du calcul asymptotique sont riches et variés. Voici quelques exemples :

Propriété 18 Soit f une fonction définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$. La fonction f est dérivable en a de dérivée $f'(a)$ si et seulement si :

$$f(a+h) = f(a) + h.f'(a) + o_{h \rightarrow 0}(h)$$

Propriété 19 Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$. La courbe de f admet pour asymptote au voisinage de $+\infty$ la droite $y = ax + b$ quand on a pour $x \rightarrow \infty$:

$$f(x) = ax + b + o(1)$$

Soit a un réel et f une fonction définie au voisinage de a et de classe $\mathcal{C}^2$:

Propriété 20 Si f admet un extremum local en a alors $f'(a) = 0$.

Si on a de plus :

$$f(a+h) = f(a) + \alpha h^2 + o_{h \rightarrow 0}(h^2)$$

alors :

- Si $\alpha > 0$, $f(a)$ est un minimum local.
- Si $\alpha < 0$, $f(a)$ est un maximum local.

Concernant la factorielle (il faut savoir que cette formule existe mais elle n'est pas à connaître par coeur) :

Théorème 2 (Formule de Stirling)

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

4 Fonctions convexes

Soit I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

Remarquons que pour tout $(x, y) \in I^2$ ($x \neq y$) et $\lambda \in [0, 1]$: $(1 - \lambda)x + \lambda y \in [x, y] \subset I$ et que si $z \in [x, y]$ alors $z = (1 - \lambda)x + \lambda y$ avec $\lambda = \frac{z-x}{y-x} \in [0, 1]$.

Dit autrement : pour tout $(x, y) \in I^2$ et λ, μ dans $\mathbb{R}_+^*$:

$$\frac{\lambda x + \mu y}{\lambda + \mu} \in [x, y] \subset I$$

Autrement dit un intervalle est un ensemble *convexe*.

Soit f une fonction définie sur I .

Définition 6 La fonction f est convexe sur I quand pour tout $(x, y) \in I^2$ et $\lambda \in [0, 1]$:

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

Ou de manière équivalente :

Pour tout $(x, y) \in I^2$ et λ, μ dans $\mathbb{R}_+^*$:

$$f\left(\frac{\lambda x + \mu y}{\lambda + \mu}\right) \leq \frac{\lambda f(x) + \mu f(y)}{\lambda + \mu}$$

Faisons tout de suite les remarques suivantes :

Propriété 21 • Si f et g sont des fonctions convexes sur I et si α et β sont positifs alors $\alpha f + \beta g$ est convexe sur I .

- Une fonction affine est convexe sur I .
- Si la fonction f est convexe sur I et a, b sont réels alors la fonction $x \rightarrow f(x) - (ax + b)$ est encore une fonction convexe.

Notons une application classique :

Propriété 22 Si la fonction f est convexe sur I et $x < z < y$ avec $f(x) = f(y) = 0$ alors $f(z) \leq 0$

Propriété 23 (Pentes d'une fonction convexe) La fonction f est convexe sur I quand pour $x < z < y$ dans I :

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

Ainsi si la fonction f est dérivable :

Propriété 24 (Convexité des fonctions à dérivée croissante) Si la fonction f est dérivable et à dérivée croissante sur I alors f est convexe sur I .

Ainsi si la fonction f est dérivable :

Propriété 25 (Convexité des fonctions à dérivée dérivée seconde positive) Si la fonction f est 2 fois dérivable et à dérivée seconde positive sur I alors f est convexe sur I .

Posons $a \in I$ et f convexe et dérivable en a . On peut poser pour $x \in I$: $T_a(x) = f'(a)(x - a) + f(a)$ l'application tangente à f en a . On a pour $x \in I$:

$$f(x) \geq T_a(x) = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Autrement dit une fonction convexe est toujours au dessus de ses tangentes.

Propriété 26 (Inégalité de Jensen) Si la fonction f est convexe sur I alors si $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, \dots, x_n) \in I^n$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0, 1]^n$ de somme 1 :

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

Dit autrement : si $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, \dots, x_n) \in I^n$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$:

$$f\left(\frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}\right) \leq \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}$$

Savoirs et savoirs faire indispensables

Savoirs

Définition d'une fonction ou d'une suite dominée, négligeable par rapport à une autre, équivalente à une autre suite.

Équivalents classiques.

Formule de Taylor.

Développements des fonctions élémentaires.

Savoir-faire

Calculs simples de développements limités.