

Chapitres 16 : Matrices.

Plan

1	Rappels	2
1.1	Algèbre linéaire	2
1.2	Matrices	2
1.3	Matrices inversibles	3
2	Matrice d'un vecteur et d'une application linéaire.	3
2.1	Matrice colonne d'un vecteur	3
2.2	Matrice d'une application linéaire	4
2.3	Matrice d'un endomorphisme	5
3	Matrice d'une composée et produit lignes colonnes	6
3.1	Matrices d'endomorphismes	6
3.2	Matrices d'applications linéaires	7
4	Application canoniquement associée à une matrice, rang d'une matrice	8
5	Changements de bases	9
5.1	Matrice d'une famille de vecteurs	9
5.2	Matrice de passage	10
5.3	Changement de bases	11
5.3.1	Pour un vecteur	11
5.3.2	Pour un endomorphisme	11
5.3.3	Pour une application linéaire	12
6	Trace	13

Dans tout ce chapitre, on fixe $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et on considère des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, tous de dimensions finies.

1 Rappels

1.1 Algèbre linéaire

Soit E est un espace vectoriel de dimension p et $B = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E .

Si v est un vecteur de E alors on peut écrire de façon unique : $v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p$. Les scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont les coordonnées de v dans la base B .

Propriété 1 *Si E et F sont des espaces vectoriels, E de dimension finie, $(e_1, \dots, e_p)$ une base de E , $(f_1, \dots, f_p)$ une famille de F , alors il existe une et une seule application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$:*

$$u(e_i) = f_i$$

Rappelons que $\mathcal{L}(E)$ est un espace vectoriel et un anneau (non commutatif si $\dim(E) \geq 2$) dont le produit est donné par la composition des endomorphismes et dont l'élément neutre est l'identité.

Les identités géométriques et du binôme s'appliquent à 2 éléments qui **commutent**.

$\text{Aut}(E)$, l'ensemble des endomorphismes bijectifs de E est un groupe multiplicatif dont l'élément neutre est l'identité.

1.2 Matrices

On rappelle : $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$:

$$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = \left\{ M = [\lambda_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} / \forall \substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p} \lambda_{ij} \in \mathbb{K} \right\}$$

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices à n lignes et n colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$:

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \{ M = [\lambda_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n} / \forall 1 \leq i, j \leq n \lambda_{ij} \in \mathbb{K} \}$$

Pour la multiplication par les constantes et l'addition termes à termes, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel de dimension $n \times p$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel de dimension n^2 .

L'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel et un anneau (non commutatif si $n \geq 2$) dont le produit est le produit lignes colonnes et dont l'élément neutre est la matrice I_n .

Les identités géométriques et du binôme s'appliquent à 2 éléments qui **commutent**.

1.3 Matrices inversibles

Théorème 1 $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ est un groupe (multiplicatif) d'élément neutre I_n , appelé **groupe linéaire d'ordre n** . En particulier, le produit de 2 matrices M et N inversibles est inversible et, de plus :

$$\begin{aligned}(M.N)^{-1} &= N^{-1}.M^{-1} \\ (M^{-1})^{-1} &= M\end{aligned}$$

L'ensemble des matrices diagonales (resp. triangulaires supérieures, resp. triangulaires inférieures) inversibles autrement dit à éléments diagonaux non nuls forme un sous groupe du groupe $\text{GL}_n(\mathbb{K})$.

2 Matrice d'un vecteur et d'une application linéaire.

2.1 Matrice colonne d'un vecteur

Soit E un espace vectoriel muni d'une base $B = (e_1, \dots, e_n)$.

Définition 1 Soit $v \in E$. On peut écrire $v = \lambda_1.e_1 + \dots + \lambda_n.e_n$. On pose alors :

$$X = \text{Mat}_B(v) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

$X \in \mathbb{K}^n$ est la **matrice colonne** ou le **vecteur colonne** représentant le vecteur v dans la base B .

Théorème 2 On considère E un espace de dimension n , B une base.

L'application :

$$\text{Mat}_B \begin{cases} E \rightarrow \mathbb{K}^n \\ v \rightarrow \text{Mat}_B(v) \end{cases}$$

qui à tout vecteur de E associe le vecteur colonne qui le représente dans la base B définit un isomorphisme d'espaces vectoriels entre E et $\mathbb{K}^n$.

En particulier, notons que si v et w sont deux vecteurs de E et λ un scalaire :

$$\begin{aligned}\text{Mat}_B(v + w) &= \text{Mat}_B(v) + \text{Mat}_B(w) \\ \text{Mat}_B(\lambda v) &= \lambda \text{Mat}_B(v)\end{aligned}$$

Remarquons que le résultat précédent dans le cas de $\mathbb{K}^n$ muni de sa base canonique consiste à remarquer que si $v \in \mathbb{K}^n$: $\text{Mat}_{\text{can}}(v) = v \dots$

2.2 Matrice d'une application linéaire

On considère E un espace vectoriel muni d'une base $B = (e_1, \dots, e_p)$ et F un autre espace vectoriel muni d'une base $C = (f_1, \dots, f_n)$.

Soit u une application linéaire de E dans F . On peut écrire :

$$\begin{aligned} u(e_1) &= \lambda_{11}f_1 + \dots + \lambda_{i1}f_i + \dots + \lambda_{n1}f_n \\ &\vdots \\ u(e_j) &= \lambda_{1j}f_1 + \dots + \lambda_{ij}f_i + \dots + \lambda_{nj}f_n \\ &\vdots \\ u(e_p) &= \lambda_{1p}f_1 + \dots + \lambda_{ip}f_i + \dots + \lambda_{np}f_n \end{aligned}$$

Les nombres (λ_{ij}) déterminent complètement l'application u .

Définition 2 Dans les conditions précédentes, $M = [\lambda_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est la **matrice** dans les bases B et C de l'application linéaire u . On note :

$$M = \text{Mat}_{B,C}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1j} & \dots & \lambda_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \lambda_{i1} & \dots & \lambda_{ij} & \dots & \lambda_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n1} & \dots & \lambda_{nj} & \dots & \lambda_{np} \end{pmatrix}$$

Autrement dit, la j -ième colonne de la matrice $\text{Mat}_{B,C}(u)$ est constituée par les coordonnées dans la base C (de F) de l'image par u du j -ième vecteur de la base B (de E).

Ainsi avec les notations précédentes :

$$M = \text{Mat}_{B,C}(u) = (\text{Mat}_C(u(e_1)) \quad \dots \quad \text{Mat}_C(u(e_j)) \quad \dots \quad \text{Mat}_C(u(e_p)))$$

Le fait que toute matrice représente une application et une seule entraîne :

Théorème 3 Dans les condition précédentes l'application :

$$\text{Mat}_{B,C} \begin{cases} \mathcal{L}(E, F) \rightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ u \mapsto \text{Mat}_{B,C}(u) \end{cases}$$

qui à toute application linéaire entre E et F associe sa matrice dans les bases B et C définit un isomorphisme d'espaces vectoriels entre $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

En particulier, notons que si u et v sont des applications linéaires et λ un scalaire :

$$\begin{aligned}\text{Mat}_{B,C}(u+v) &= \text{Mat}_{B,C}(u) + \text{Mat}_{B,C}(v) \\ \text{Mat}_{B,C}(\lambda u) &= \lambda \text{Mat}_{B,C}(u)\end{aligned}$$

Dans le cas où l'espace E est $\mathbb{K}^p$ et l'espace F est $\mathbb{K}^n$ et que les bases choisies sont les bases canoniques, on obtient :

Définition 3 Si u est une application linéaire entre $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$, en reportant dans la j -ième colonne les coordonnées de $u(e_j)$ ($e_j : j$ -ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{K}^p$), on construit la **matrice canoniquement associée** à $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ souvent notée $\text{Mat}(u)$ ou $\text{Mat}_{\text{can}}(u)$.

Les résultats précédents montrent :

Propriété 2 L'application :

$$\text{Mat}_{\text{can}} \begin{cases} \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n) \rightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ u \mapsto \text{Mat}_{\text{can}}(u) \end{cases}$$

qui à toute application linéaire entre $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$ associe sa matrice canonique définit un isomorphisme d'espaces vectoriels dit canonique entre $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

2.3 Matrice d'un endomorphisme

Dans le cas d'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$ d'un espace E de dimension finie muni d'une base, la situation précédente est souvent simplifiée par le fait qu'on choisit la même base au départ et à l'arrivée. Cela ne sera cependant pas toujours le cas (se reporter alors au chapitre précédent).

Définition 4 La **matrice** $\text{Mat}_B(u)$ dans la base B de l'endomorphisme u est la matrice $\text{Mat}_{B,B}(u)$.

Autrement dit, la j -ième colonne de la matrice $\text{Mat}_B(u)$ est constituée par les coordonnées dans la base B de l'image par u du j -ième vecteur de la base B .

Le fait que toute matrice représente un endomorphisme et une seule entraîne :

Théorème 4 On considère E un espace de dimension n , B une base.

L'application :

$$\text{Mat}_B \begin{cases} \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ u \mapsto \text{Mat}_B(u) \end{cases}$$

qui à tout endomorphisme de E associe sa matrice dans la base B définit un isomorphisme d'espaces vectoriels entre $\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Ainsi avec les notations précédentes :

$$M = \text{Mat}_B(u) = (\text{Mat}_B(u(e_1)) \quad \dots \quad \text{Mat}_B(u(e_j)) \quad \dots \quad \text{Mat}_B(u(e_n)))$$

En particulier, rappelons que si u et v sont des endomorphismes et λ un scalaire :

$$\begin{aligned} \text{Mat}_B(u + v) &= \text{Mat}_B(u) + \text{Mat}_B(v) \\ \text{Mat}_B(\lambda v) &= \lambda \text{Mat}_B(v) \end{aligned}$$

Indépendamment de la base B choisie de E :

$$I_n = \text{Mat}_B(\text{Id}_E)$$

3 Matrice d'une composée et produit lignes colonnes

3.1 Matrices d'endomorphismes

Dans les espaces $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{L}(E)$, on sait que la "multiplication" est donnée par la composition des applications linéaires.

Dans les espaces $\mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on sait que la "multiplication" est donnée par le produit ligne colonne.

Théorème 5 (Multiplication des matrices, formule du produit lignes-colonnes)

Soit E un espace vectoriel muni d'une base B et u, v des endomorphismes de E . On suppose $P = \text{Mat}_B(v)$, $Q = \text{Mat}_B(u)$. On a alors :

$$\text{Mat}_B(v \circ u) = P.Q$$

Autrement dit :

$$\text{Mat}_B(v) \cdot \text{Mat}_B(u) = \text{Mat}_B(v \circ u)$$

De plus, si n est un entier naturel :

$$\text{Mat}_B(v^n) = (\text{Mat}_B(v))^n$$

Rappelons que dans les conditions précédentes, si $P = [p_{ik}]_{1 \leq i, k \leq n}$ et $Q = [q_{kj}]_{1 \leq k, j \leq n}$ alors

$$P.Q = [p_{ik}]_{1 \leq i, k \leq n} \cdot [q_{kj}]_{1 \leq k, j \leq n} = \left[\sum_{1 \leq k \leq n} p_{ik} \cdot q_{kj} \right]_{1 \leq i, j \leq n}$$

Finalement on a :

Théorème 6 *Si E est un espace vectoriel muni d'une base B alors :*

$$\text{Mat}_B \begin{cases} \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ u \rightarrow \text{Mat}_B(u) \end{cases}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels et d'anneaux unitaires.

Propriété 3 Dans les conditions précédentes, si $u \in \mathcal{L}(E)$: la matrice $\text{Mat}_B(u)$ est inversible si et seulement si u est un automorphisme et, dans ce cas :

$$\text{Mat}_B(u^{-1}) = (\text{Mat}_B(u))^{-1}$$

Théorème 7 Si E est un espace vectoriel muni d'une base B alors :

$$\text{Mat}_B \begin{cases} \text{Aut}(E) \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{K}) \\ u \rightarrow \text{Mat}_B(u) \end{cases}$$

est un isomorphisme de groupes.

3.2 Matrices d'applications linéaires

Théorème 8 Soit E un espace vectoriel muni d'une base B ($\dim(E) = m$), F un espace vectoriel muni d'une base C ($\dim(F) = p$), G un espace vectoriel muni d'une base D ($\dim(G) = n$). Soit aussi : $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, G)$, $v \circ u \in \mathcal{L}(E, G)$. On suppose $S = \text{Mat}_{B,C}(u)$, $R = \text{Mat}_{C,D}(v)$. On a alors :

$$\text{Mat}_{B,D}(v \circ u) = R.S$$

Autrement dit :

$$\text{Mat}_{C,D}(v) \cdot \text{Mat}_{B,C}(u) = \text{Mat}_{B,D}(v \circ u)$$

$R.S$ est le ici le produit des matrices M et N .

Dans les conditions précédentes, si $R = [r_{ik}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq k \leq p}}$ et $S = [s_{kj}]_{\substack{1 \leq k \leq p \\ 1 \leq j \leq m}}$ rappelons qu'on a :

$$R.S = [r_{ik}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq k \leq p}} \cdot [s_{kj}]_{\substack{1 \leq k \leq p \\ 1 \leq j \leq m}} = \left[\sum_{1 \leq k \leq p} r_{ik} \cdot s_{kl} \right]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$$

Rappelons qu'un vecteur peut être représenté par une matrice colonne ce qui permet de définir le produit d'une matrice et d'un vecteur et ainsi pour l'action des matrices sur les vecteurs :

Théorème 9 Soit E un espace vectoriel muni d'une base B , $u \in \mathcal{L}(E)$, $v \in E$. On suppose $M = \text{Mat}_B(u)$, $X = \text{Mat}_B(v)$. On a alors :

$$\text{Mat}_B(u(v)) = \text{Mat}_B(u) \cdot \text{Mat}_B(v)$$

Si $Y = \text{Mat}_B(u(v))$ alors :

$$Y = M.X$$

Notons que le produit $M.X$ est formé d'une colonne.

Pour les applications linéaires en général :

Théorème 10 Soit E un espace vectoriel muni d'une base B , F un espace vectoriel muni d'une base C . Soit aussi : $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in E$. On suppose $M = \text{Mat}_{B,C}(u)$, $X = \text{Mat}_B(v)$, $Y = \text{Mat}_C(u(v))$. On a alors :

$$\text{Mat}_C(u(v)) = \text{Mat}_{B,C}(u) \cdot \text{Mat}_B(v) \quad Y = M.X$$

Le lien avec les isomorphismes est donné par :

Propriété 4 Soit E un espace vectoriel, B une base de E , F un espace vectoriel, C une base de F et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. La matrice $\text{Mat}_{B,C}(u)$ (carrée dans ce cas) est inversible si et seulement si u est un isomorphisme entre E et F (dans ce cas $\dim(E) = \dim(F)$) et, dans ce cas :

$$\text{Mat}_{C,B}(u^{-1}) = (\text{Mat}_{B,C}(u))^{-1}$$

4 Application canoniquement associée à une matrice, rang d'une matrice

Dans le cas des espaces canoniques munis de leurs bases canoniques :

Propriété 5 Si $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$, $v \in \mathbb{K}^p$. On a :

$$u(v) = \text{Mat}_{\text{can}}(u).v$$

Notons que, dans ce cas, les colonnes de la matrice $\text{Mat}_{\text{can}}(u) \in \mathcal{M}_{n,p}$ sont les images des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{K}^p$ par u .

Inversement, si A est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}$, on peut lui associer l'application, parfois notée A :

$$A : \begin{cases} \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}^n \\ X \rightarrow A.X \end{cases}$$

Cette application a pour matrice dans les bases canoniques justement la matrice A . On dit que c'est l'application **canoniquement associée à la matrice** A .

Du coup, par définition, le **rang**, noté $\text{rg}(A)$, l'**image**, notée $\text{Im}(A)$, le **noyau**, noté $\ker(A)$, d'une matrice sont ceux de l'application canoniquement associés.

Propriété 6 Dans les conditions précédentes ($A \in \mathcal{M}_{n,p}$, $X \in \mathbb{K}^p$), le vecteur $A.X$ est une combinaison linéaire des vecteurs colonnes de A .

L'image de la matrice A est l'espace engendré par ses vecteurs colonnes.

Le rang de la matrice A est celui de la famille de ses vecteurs colonnes.

Le rang de la matrice A est aussi celui de la famille de ses vecteurs lignes (ceci est délicat à prouver).

Les matrices inversibles sont sans effet sur le rang, autrement dit :

Propriété 7 *Si A est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et si $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ sont toutes deux inversibles alors les matrices A , $P.A$, $A.Q$, $P.A.Q$ ont le même rang.*

Un lien important avec les systèmes est donné par :

Propriété 8 *Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}$, le rang de la matrice A est celui du système d'inconnue $X \in \mathbb{K}^p : A.X = 0$ (ou de tout système avec second membre associé).*

On peut remarquer que si A et B sont deux matrices telles que le produit $A.B$ est défini alors la j -ième colonne de $A.B$ est le produit de A par la j -ième colonne de B et que la i -ième ligne de $A.B$ est le produit de la i -ième ligne de A par B .

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p} : M = [m_{i,j}]_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$.

Si on considère $I = \{i_1 < \dots < i_{n'}\}$ une partie de $\llbracket 1, n \rrbracket$ et $J = \{j_1 < \dots < j_{p'}\}$ une partie de $\llbracket 1, p \rrbracket$, on peut poser

$$N = [m_{i_k, j_l}]_{\substack{1 \leq k \leq n' \\ 1 \leq l \leq p'}}$$

La matrice $N \in \mathcal{M}_{n',p'}$ (carrée si $p' = n'$) est une matrice extraite de la matrice M .

On montre que dans ces conditions $\text{rg}(N) \leq \text{rg}(M)$. Plus précisément :

Théorème 11 *Si $M \in \mathcal{M}_{n,p}$ alors il existe (au moins) une matrice carrée inversible N extraite de M et de rang maximal c'est à dire $\text{rg}(N) = \text{rg}(M)$.*

5 Changements de bases

5.1 Matrice d'une famille de vecteurs

Soit E un espace vectoriel, $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $F = (f_1, \dots, f_m)$ une famille de vecteurs de E .

On peut écrire :

$$\begin{aligned} f_1 &= \lambda_{11}e_1 + \dots + \lambda_{i1}e_i + \dots + \lambda_{n1}e_n \\ &\vdots \\ f_j &= \lambda_{1j}e_1 + \dots + \lambda_{ij}e_i + \dots + \lambda_{nj}e_n \\ &\vdots \\ f_m &= \lambda_{1m}e_1 + \dots + \lambda_{im}e_i + \dots + \lambda_{nm}e_n \end{aligned}$$

Définition 5 Dans les conditions précédentes, la matrice : $M = [\lambda_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n}$ (n lignes, m colonnes) est la **matrice** dans la base B de la famille F . On note :

$$M = \text{Mat}_B(F) = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1j} & \dots & \lambda_{1m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \lambda_{i1} & \dots & \lambda_{ij} & \dots & \lambda_{im} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n1} & \dots & \lambda_{nj} & \dots & \lambda_{nm} \end{pmatrix}$$

Autrement dit, la j -ième colonne de la matrice $\text{Mat}_B(F)$ est constituée par les coordonnées dans la base B du j -ième vecteur de la famille F .

Propriété 9 Le rang d'une famille de vecteurs est égal au rang de sa matrice dans une base donnée, autrement dit, avec les notations précédentes :

$$\text{rg}(F) = \text{rg}(\text{Mat}_B(F))$$

On admettra (c'est assez délicat à montrer) :

Propriété 10 Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}$, le rang de la matrice A c'est à dire celui de l'espace engendré par ses colonnes est aussi celui de l'espace engendré par ses lignes.

5.2 Matrice de passage

Théorème 12 Soit E un espace vectoriel, $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $F = (f_1, \dots, f_n)$ une famille de n vecteurs de E .

La famille F est une base de E si et seulement si la matrice $\text{Mat}_B(F)$ est inversible autrement dit si elle est carrée et de rang égal à sa dimension.

On introduit alors la notion de matrice de passage :

Définition 6 Soit E un espace vectoriel, $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $B' = (f_1, \dots, f_n)$ une autre base de E .

La matrice $\text{Mat}_B(B')$ aussi notée $P_{BB'}$ est appelée **la matrice de passage** de la base B à la base B' . Sa j -ième colonne est formée par les coordonnées dans la base B du j -ième vecteur de la base B' .

Remarquons :

Propriété 11 $P_{BB'}$ est une matrice inversible : $P_{BB'} \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$. En fait :

$$P_{BB'} = \text{Mat}_{B',B}(\text{Id}_E)$$

De plus,

$$P_{B'B} = (P_{BB'})^{-1}$$

Remarquons aussi que si B, B', B'' sont trois bases d'un même espace E alors :

$$P_{BB''} = P_{BB'} \cdot P_{B'B''}$$

5.3 Changement de bases

On considère E un espace vectoriel B une base de E (en pratique "ancienne base") et B' une seconde base de E (en pratique "nouvelle base")

5.3.1 Pour un vecteur

En écrivant les coordonnées d'un vecteur $v \in E$ dans les bases B et B' , on fait apparaître les matrices colonnes $X = \text{Mat}_B(v)$ et $X' = \text{Mat}_{B'}(v)$.

Propriété 12 Dans les conditions précédentes :

$$\text{Mat}_{B'}(v) = P_{B'B} \cdot \text{Mat}_B(v) = (P_{BB'})^{-1} \cdot \text{Mat}_B(v)$$

Autrement dit :

$$X' = (P_{BB'})^{-1} \cdot X$$

La relation précédente revient à écrire : $\text{Mat}'_B(v) = \text{Mat}_{B'}(Id_E(v)) = \text{Mat}_{B,B'}(Id_E) \cdot \text{Mat}_B(v)$.

En identifiant K^n et $\mathcal{M}_{n,1}$, on a :

Propriété 13 L'application "changement de base" définie par : $\begin{cases} \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n \\ X \rightarrow X' = P_{BB'}^{-1} \cdot X \end{cases}$ est un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$.

5.3.2 Pour un endomorphisme

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, lui sont associées les matrices carrées $M = \text{Mat}_B(u)$ et $M' = \text{Mat}_{B'}(u)$.

Propriété 14 Dans les conditions précédentes :

$$\text{Mat}_{B'}(u) = P_{B'B} \cdot \text{Mat}_B(u) \cdot P_{BB'} = (P_{BB'})^{-1} \cdot \text{Mat}_B(u) \cdot P_{BB'}$$

C'est à dire :

$$M' = (P_{BB'})^{-1} \cdot M \cdot P_{BB'}$$

La relation précédente revient à écrire :

$$\text{Mat}_{B'}(u) = \text{Mat}_{B'}(Id \circ u \circ Id) = \text{Mat}_{B,B'}(Id) \cdot \text{Mat}_B(u) \cdot \text{Mat}_{B',B}(Id).$$

Posons pour simplifier $P = P_{BB'}$, on a alors :

Propriété 15 L'application "changement de base" définie par :

$$\begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M \rightarrow M' = P^{-1} \cdot M \cdot P \end{cases}$$

est un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec de plus pour le produit des propriétés du type (M et N sont des matrices carrées d'ordre n) :

$$(P^{-1} \cdot M \cdot P) \cdot (P^{-1} \cdot N \cdot P) = (P^{-1} \cdot (MN) \cdot P)$$

$$P^{-1} \cdot M^k \cdot P = (P^{-1} \cdot M \cdot P)^k$$

si k est un entier naturel.

Par restriction :

Propriété 16 L'application "changement de base" définie par :

$$\begin{cases} \text{GL}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{K}) \\ M \rightarrow M' = P^{-1} \cdot M \cdot P \end{cases}$$

est un automorphisme du groupe linéaire $\text{GL}_n(\mathbb{K})$.

On arrive à la notion de matrices **semblables** :

Propriété 17 Soient A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, elles sont dites **semblables** quand il existe une matrice inversible $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$B = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

Dit plus concrètement : deux matrices sont semblables si elles représentent le même endomorphisme dans 2 bases différentes.

Propriété 18 Deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ semblables ont même rang, du coup l'une est inversible si et seulement si l'autre l'est.

5.3.3 Pour une application linéaire

On considère ici, de plus, un espace F et 2 bases C et C' de F .

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, lui sont associées les matrices $M = \text{Mat}_{B,C}(u)$ et $M' = \text{Mat}_{B',C'}(u)$.

Propriété 19 Dans les conditions précédentes :

$$\text{Mat}_{B',C'}(u) = P_{C'C} \cdot \text{Mat}_{B,C}(u) \cdot P_{BB'} = (P_{CC'})^{-1} \cdot \text{Mat}_{B,C}(u) \cdot P_{BB'}$$

C' est à dire :

$$M' = (P_{CC'})^{-1} \cdot M \cdot P_{BB'}$$

La relation précédente revient à écrire :

$$\text{Mat}_{B',C'}(u) = \text{Mat}_{B',C'}(Id_F \circ u \circ Id_E) = \text{Mat}_{C,C'}(Id_E) \cdot \text{Mat}_{B,C}(u) \cdot \text{Mat}_{B',B}(Id).$$

On arrive à la notion de matrices **équivalentes** :

Propriété 20 Soient A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, elles sont dites **équivalentes** quand il existe une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et une matrice inversible $Q \in GL_p(\mathbb{K})$ telle que :

$$B = P^{-1} \cdot A \cdot Q$$

Dit plus concrètement : deux matrices sont équivalentes si elles représentent la même application linéaire entre les espaces E et F avec des choix de bases de E et F différents.

On peut classer les matrices à équivalence près.

On considère J_r la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ayant tous ses coefficients nuls sauf les r premiers coefficients sur la diagonale qui sont égaux à 1.

$$J_r = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right]$$

Théorème 13 Deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang. Une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r est équivalente à la matrice J_r .

6 Trace

On fixe n un entier non nul.

Définition 7 Si $M = [m_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose

$$\text{tr}(M) = \sum_{i=1}^n m_{i,i}$$

Le scalaire $\text{tr}(M)$ est la **trace** de la matrice M , la somme des coefficients sur sa diagonale. On a ainsi une forme linéaire :

$$\text{tr} \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K} \\ M \rightarrow \text{tr}(M) \end{cases}$$

En particulier, si λ est un scalaire et si M et N sont dans l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\text{tr}(\lambda.M) = \lambda \text{tr}(M) \quad , \quad \text{tr}(M + N) = \text{tr}(M) + \text{tr}(N)$$

Concernant le produit, la transposition :

Propriété 21 Si M et N sont dans l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors :

$$\text{tr}(M.N) = \text{tr}(N.M)$$

$$\text{tr}({}^t M) = \text{tr}(M)$$

Si $P \in GL_n(\mathbb{K})$:

$$\text{tr}(P^{-1} \cdot M \cdot P) = \text{tr}(M)$$

On en déduit :

Théorème 14 Deux matrices semblables dans l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ont la même trace.

On peut alors définir :

Définition 8 Si u est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n et si $M = \text{Mat}_B(u)$ est sa matrice dans une base B quelconque de E , alors, on pose :

$$\text{tr}(u) = \text{tr}(\text{Mat}_B(u))$$

Le scalaire $\text{tr}(u)$ est la **trace** de l'endomorphisme u .

Concernant le produit, la somme :

Propriété 22 Si u et v sont dans l'espace $\mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors :

$$\text{tr}(u \circ v) = \text{tr}(v \circ u) \quad \text{tr}(u + v) = \text{tr}(u) + \text{tr}(v) \quad \text{tr}(\lambda u) = \lambda \text{tr}(u)$$

Notons aussi que tr définit une forme linéaire sur l'espace $\mathcal{L}(E)$.

Terminons en remarquant que $\text{tr}(Id_E) = \dim(E)$ et que si p est un projecteur de E alors $\text{tr}(p) = \text{rg}(p)$.

Savoirs et savoirs faire indispensables

Savoirs

Propriétés élémentaires sur les matrices et applications linéaires : sommes, produits, inverses, composées ... Connaître les formules de changements de bases.

Savoir-faire

Calculer et manipuler la matrice d'une application linéaire, calculer l'application associée à une matrice, calculer l'inverse d'une matrice, faire un produit de matrices, faire un changement de bases.