

Fiche 58 : Td du 19-03.

Exercice 1

1. Calculer le développement à la précision $o(x^3)$ pour $x \rightarrow 0$ de l'expression $\sin(\tan(x))$ en justifiant proprement.
2. Calculer le développement à la précision $o(x^4)$ pour $x \rightarrow 0$ de l'expression $\ln(\cos(x))$ en justifiant proprement.
3. Calculer le développement à la précision $o(x^4)$ pour $x \rightarrow 0$ de l'expression $\arctan(\cosh(x))$ en justifiant proprement.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x \sinh\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Montrer que pour tout $x > 0$, on a $\tanh(x) < x$.
2. En déduire le tableau de variations de f . On précisera les limites aux bornes.
3. Donner le développement limité à l'ordre 3 pour $u \rightarrow 0$ de $\sinh(u)$.
4. En déduire que f admet pour $x \rightarrow +\infty$ un développement asymptotique de la forme

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

où a_0, a_1, a_2 sont des réels que l'on précisera.

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f(x) = \frac{n+1}{n}$ admet une unique solution notée dans la suite u_n .
6. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
7. Déterminer un équivalent simple de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 3

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et f une fonction réelle dérivable sur I . On veut prouver dans cette exercice que f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires. Un exemple est traité à la fin de l'exercice.

On notera que la fonction n'est pas supposée de classe C^1 . Dans cet exercice, on prendra soin de citer explicitement les différents résultats du cours utilisés pour justifier les affirmations faites.

On se donne $(a, b) \in I^2$, tel que $f'(a) < f'(b)$, et $z \in]f'(a), f'(b)[$.

1. Montrer qu'il existe $h > 0$ tel qu'on ait $(a + h) \in I$, $(b + h) \in I$ et :

$$\frac{1}{h} (f(a + h) - f(a)) < z < \frac{1}{h} (f(b + h) - f(b)).$$

On se fixe un tel $h > 0$ dans la suite.

2. En déduire l'existence d'un point y de I tels que :

$$y + h \in I \text{ et } \frac{1}{h} (f(y + h) - f(y)) = z.$$

3. Montrer qu'il existe un point x de I tel que $z = f'(x)$.
4. En déduire que $f'(I)$ est un intervalle.
5. Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ si $x \in]0, 1]$ et par $f(0) = 0$.
 - (a) Montrer que f est dérivable sur $[0, 1]$.
 - (b) f' est-elle continue sur $[0, 1]$?
 - (c) Déterminer $f'([0, 1])$.

On pourra montrer que $\sup_{[0, 1]}(f') = +\infty$ et utiliser le résultat prouvé dans l'exercice